Inferència de Tipus a Haskell

Mateu Villaret

21 d'abril de 2008

1 Exemple d'inferència de tipus

Considerem la definició en Haskell de la funció `map`

Haskell Code

```haskell
map f [] = []
map f (x:xs) = (f x) : (map f xs)
```

Primer el passem a lambda-càlcul:

$$\lambda f \,.\, \lambda [] \,.\, []$$
$$\lambda f \,.\, \lambda (\texttt{cons}\ x\ xs) \,.\, \texttt{cons}\ (f\ x)(\texttt{map}\ f\ xs)$$

després en fem el *parse-tree* i etiquetem amb tipus (vegeu les Figures 1 i 2):

- primerament posem les etiquetes que sapiguem del llenguatge. En aquest cas tenim les funcions predefinides d'afegir per l'esquerra un element a una llista `cons` (els `:` en Haskell) i la de la llista buida `empty_list` (el [ ] de Haskell). Cada vegada que apareixen els associem una variable de tipus diferent: per exemple per el `cons` podem fer `a -> [a] -> [a]` i `b -> [b] -> [b]`. Si no ho féssim així estaríem forçant a que els dos llocs on aparegués el `cons` estigues fent llistes amb el mateix tipus d'elements i no te perquè ser així.

  COMPTE: hem de vigilar no donar dos tipus iguals a nodes diferents, sobretot en arbres diferents recordem-nos de posar noms diferents (per exemple en un posar s's i en l'altre t's.

- després posem tipus a cada node restant de l'arbre, tant intermig com fulla, respectant el següent:

  - els paràmetres han d'estar etiquetats amb el mateix tipus a tot arreu on apareguin. Per exemple, a la segona regla de la funció `map`, un paràmetre és `f` i apareix 2 cops a la definició, doncs tant a l'abstracció, com als dos cops de la definició, ha de tenir el mateix tipus (la mateixa etiqueta).

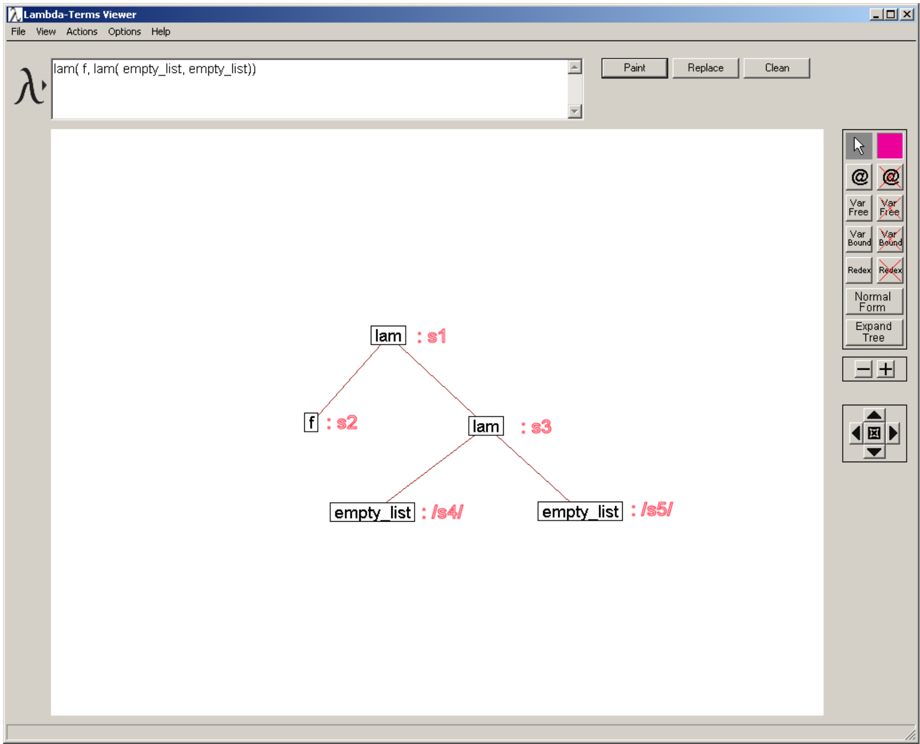

Figura 1: L'arbre de parsing de la primera regla del map. Fixeu-vos que [ ] apareix com a `empty_list` i el tipus entre / / enlloc de [ ].

– en funcions recursives, el node amb la crida recursiva ha de tenir el mateix tipus que l'arrel de tot l'arbre de parsing. Per exemple, en el cas de la segona regla del `map`, l'arrel i el node `map` han de tenir el mateix tipus (mateixa etiqueta).

Una vegada etiquetat l'arbre toca generar les equacions:

- els nodes d'aplicació `@:`t_0`(n1:` t_1`, n2:` t_2`)`, generen l'equació: $t_1 \stackrel{?}{=} t_2 \to t_0$.
- els nodes d'abstracció `lam:`t_0`(n1:` t_1`, n2:` t_2`)`, generen: $t_0 \stackrel{?}{=} t_1 \to t_2$.
- quan hi ha més d'una regla, i per tant més d'un arbre, s'han d'agafar els tipus dels arbres per parells (suposem s_0 i t_0) i fer equacions entre si: $s_0 \stackrel{?}{=} t_0$.

De la primera regla del `map` surten aquestes dues equacions:

$$s_1 \stackrel{?}{=} s_2 \to s_3$$
$$s_3 \stackrel{?}{=} [s_4] \to [s_5]$$

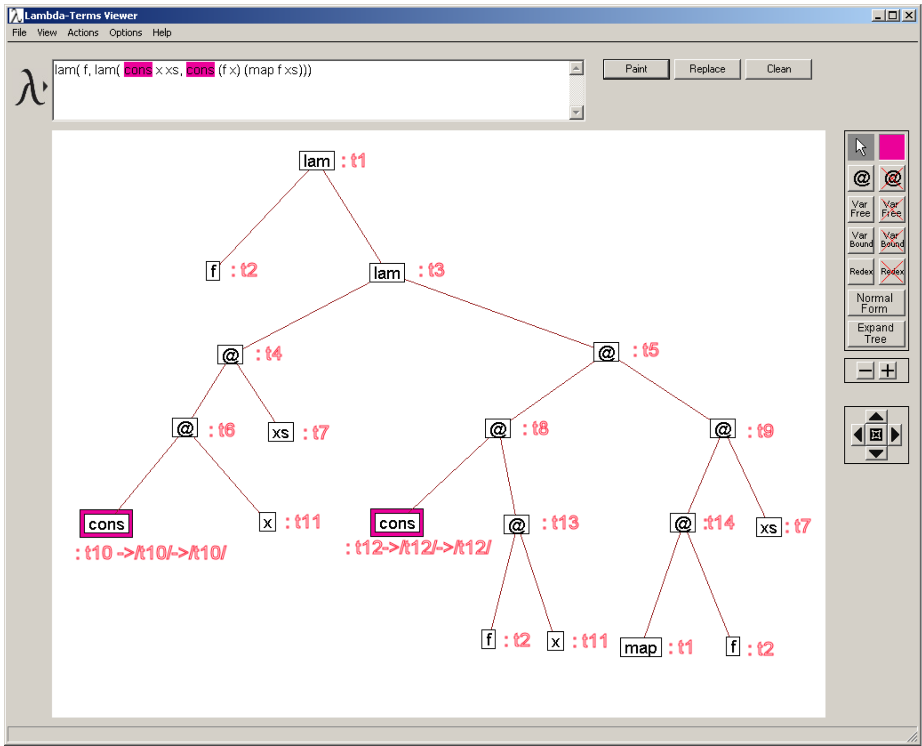

Figura 2: L'arbre de parsing de la regla recursiva del map. Fixeu-vos que els : apareixen com a `cons` i que el tipus llista apareix entre / / enlloc de [ ].

i de la segona aquestes 9:

1) $t_1 \stackrel{?}{=} t_2 \rightarrow t_3$
2) $t_3 \stackrel{?}{=} t_4 \rightarrow t_5$
3) $t_6 \stackrel{?}{=} t_7 \rightarrow t_4$
4) $t_{10} \rightarrow ([t_{10}] \rightarrow [t_{10}]) \stackrel{?}{=} t_{11} \rightarrow t_6$
5) $t_8 \stackrel{?}{=} t_9 \rightarrow t_5$
6) $t_{12} \rightarrow ([t_{12}] \rightarrow [t_{12}]) \stackrel{?}{=} t_{13} \rightarrow t_8$
7) $t_2 \stackrel{?}{=} t_{11} \rightarrow t_{13}$
8) $t_{14} \stackrel{?}{=} t_7 \rightarrow t_9$
9) $t_1 \stackrel{?}{=} t_2 \rightarrow t_{14}$

El nostre objectiu és trobar quin és el tipus s_1 i t_1, per fer això hem de **resoldre** el sistema d'equacions. La resolució és molt semblant a la resolució algebraica d'equacions. Una solució d'un sistema d'equacions és una llista de substitucions $x \mapsto t$ de manera que al aplicar la substitució a totes les equacions, aquestes tinguin el mateix terme a cada costat.

L'algorisme per resoldre el problema d'unificació rep un sistema d'equacions i una llista de substitucions (inicialment buida) i ens torna una llista de substitucions. "A grosso modo", hem d'anar simplificant les equacions fins que ens quedin en forma de

- fallo (quan tenen símbols diferents a l'arrel del terme, per exemple $[a] \stackrel{?}{=}$

$b \to c$ ja que en un costat l'arrel és el constructor de tipus llista i a l'altra el de tipus funció)

- o de la forma $x \stackrel{?}{=} t$ on x apareix a t. Llavors també diem que hi ha error a l'equació (per exemple $x \stackrel{?}{=} [x] \to y$) i per tant significa que l'expressió no és tipable.
- $x \stackrel{?}{=} t$ sense x a t. Llavors el que hem de fer és *resoldre* generant la substitució $x \mapsto t$ i aplicar-la a la resta d'equacions que tinguéssim, així com a la substitució que hem rebut i que anem construint (reemplaçar a tot arreu x per t).

Finalment, quan ja no queden equacions retornem la substitució que hem anat construint que serà la solució.

De les equacions generades per la primera regla del `map`, comencem resolent la primera i generem la substitució $s_1 \mapsto s_2 \to s_3$, retirem l'equació del sistema d'equacions i apliquem la substitució a la resta d'equacions. Com veiem la segona equació queda igual. Ara resolem la segona equació i generem la substitució $s_3 \mapsto [s_4] \to [s_5]$. Al aplicar-la a la substitució que portàvem quedarà: $[s_1 \mapsto s_2 \to [s_4] \to [s_5], s_3 \mapsto [s_4] \to [s_5]]$, que resol el sistema d'equacions generat per l'arbre de la primera regla del map.

La segona regla com ja hem dit ens ha generat moltes més equacions:

1) $t_1 \stackrel{?}{=} t_2 \to t_3$
2) $t_3 \stackrel{?}{=} t_4 \to t_5$
3) $t_6 \stackrel{?}{=} t_7 \to t_4$
4) $t_{10} \to ([t_{10}] \to [t_{10}]) \stackrel{?}{=} t_{11} \to t_6$
5) $t_8 \stackrel{?}{=} t_9 \to t_5$
6) $t_{12} \to ([t_{12}] \to [t_{12}]) \stackrel{?}{=} t_{13} \to t_8$
7) $t_2 \stackrel{?}{=} t_{11} \to t_{13}$
8) $t_{14} \stackrel{?}{=} t_7 \to t_9$
9) $t_1 \stackrel{?}{=} t_2 \to t_{14}$

Ara ja podem anar resolent. De l'equació 1, ja podem obtenir el primer tros de solució: $\sigma = [t_1 \mapsto t_2 \to t_3]$. L'apliquem al sistema d'equacions d'on traiem l'equació 1 i ens queda:

1)
2) $t_3 \stackrel{?}{=} t_4 \to t_5$
3) $t_6 \stackrel{?}{=} t_7 \to t_4$
4) $t_{10} \to ([t_{10}] \to [t_{10}]) \stackrel{?}{=} t_{11} \to t_6$
5) $t_8 \stackrel{?}{=} t_9 \to t_5$
6) $t_{12} \to ([t_{12}] \to [t_{12}]) \stackrel{?}{=} t_{13} \to t_8$
7) $t_2 \stackrel{?}{=} t_{11} \to t_{13}$
8) $t_{14} \stackrel{?}{=} t_7 \to t_9$
9) $t_2 \to t_3 \stackrel{?}{=} t_2 \to t_{14}$

Resolem l'equació 2 que ens dona $t_3 \mapsto t_4 \to t_5$ i genera la substitució $\sigma = [t_1 \mapsto t_2 \to (t_4 \to t_5), t_3 \mapsto t_4 \to t_5]$ i les equacions:

1)
2)
3) $t_6 \stackrel{?}{=} t_7 \to t_4$
4) $t_{10} \to ([t_{10}] \to [t_{10}]) \stackrel{?}{=} t_{11} \to t_6$
5) $t_8 \stackrel{?}{=} t_9 \to t_5$
6) $t_{12} \to ([t_{12}] \to [t_{12}]) \stackrel{?}{=} t_{13} \to t_8$
7) $t_2 \stackrel{?}{=} t_{11} \to t_{13}$
8) $t_{14} \stackrel{?}{=} t_7 \to t_9$
9) $t_2 \to (t_4 \to t_5) \stackrel{?}{=} t_2 \to t_{14}$

Resolem la 3 que ens dona $t_6 \mapsto t_7 \to t_4$ i genera $\sigma = [t_1 \mapsto t_2 \to (t_4 \to t_5), t_3 \mapsto t_4 \to t_5, t_6 \mapsto t_7 \to t_4]$

1)		5)	$t_8 \stackrel{?}{=} t_9 \to t_5$
2)		6)	$t_{12} \to ([t_{12}] \to [t_{12}]) \stackrel{?}{=} t_{13} \to t_8$
3)		7)	$t_2 \stackrel{?}{=} t_{11} \to t_{13}$
4)	$t_{10} \to ([t_{10}] \to [t_{10}]) \stackrel{?}{=} t_{11} \to (t_7 \to t_4)$	8)	$t_{14} \stackrel{?}{=} t_7 \to t_9$
		9)	$t_2 \to (t_4 \to t_5) \stackrel{?}{=} t_2 \to t_{14}$

Resolem la 4, al simplificar-la ens dona: $t_{10} \stackrel{?}{=} t_{11}, [t_{10}] \stackrel{?}{=} t_7, [t_{10}] \stackrel{?}{=} t_4$ i resoldre aquestes 3 de cop genera $t_{11} \mapsto t_{10}, t_7 \mapsto [t_{10}], t_4 \mapsto [t_{10}]$[1]. Reconstruïm la solució parcial: $\sigma = [t_1 \mapsto t_2 \to ([t_{10}] \to t_5), t_3 \mapsto [t_{10}] \to t_5, t_6 \mapsto [t_{10}] \to [t_{10}], t_{11} \mapsto t_{10}, t_7 \mapsto [t_{10}], t_4 \mapsto [t_{10}]]$
Ara reconstruïm les equacions:

1)	5)	$t_8 \stackrel{?}{=} t_9 \to t_5$
2)	6)	$t_{12} \to ([t_{12}] \to [t_{12}]) \stackrel{?}{=} t_{13} \to t_8$
3)	7)	$t_2 \stackrel{?}{=} t_{10} \to t_{13}$
4)	8)	$t_{14} \stackrel{?}{=} [t_{10}] \to t_9$
	9)	$t_2 \to ([t_{10}] \to t_5) \stackrel{?}{=} t_2 \to t_{14}$

Resolem la 5 que ens dona $t_8 \mapsto t_9 \to t_5$ i ens queda: $\sigma = [t_1 \mapsto t_2 \to ([t_{10}] \to t_5), t_3 \mapsto [t_{10}] \to t_5, t_6 \mapsto [t_{10}] \to [t_{10}], t_{11} \mapsto t_{10}, t_7 \mapsto [t_{10}], t_4 \mapsto [t_{10}]]$
Ara reconstruïm les equacions:

1)	5)	
2)	6)	$t_{12} \to ([t_{12}] \to [t_{12}]) \stackrel{?}{=} t_{13} \to (t_9 \to t_5)$
3)	7)	$t_2 \stackrel{?}{=} t_{10} \to t_{13}$
4)	8)	$t_{14} \stackrel{?}{=} [t_{10}] \to t_9$
	9)	$t_2 \to ([t_{10}] \to t_5) \stackrel{?}{=} t_2 \to t_{14}$

Per resoldre la 6 fem com havíem fet amb la 4. Per tant: $t_{13} \mapsto t_{12}, t_9 \mapsto [t_{12}], t_5 \mapsto [t_{12}]$ i ens queda: $\sigma = [t_1 \mapsto t_2 \to ([t_{10}] \to [t_{12}]), t_3 \mapsto [t_{10}] \to [t_{12}], t_6 \mapsto [t_{10}] \to [t_{10}], t_{11} \mapsto t_{10}, t_7 \mapsto [t_{10}], t_4 \mapsto [t_{10}], t_{13} \mapsto t_{12}, t_9 \mapsto [t_{12}], t_5 \mapsto [t_{12}]]$
Ara reconstruïm les equacions:

1)	5)	
2)	6)	
3)	7)	$t_2 \stackrel{?}{=} t_{10} \to t_{12}$
4)	8)	$t_{14} \stackrel{?}{=} [t_{10}] \to [t_{12}]$
	9)	$t_2 \to ([t_{10}] \to [t_{12}]) \stackrel{?}{=} t_2 \to t_{14}$

Resolem la 7: $t_2 \mapsto t_{10} \to t_{12}$ i ens queda: $\sigma = [t_1 \mapsto (t_{10} \to t_{12}) \to ([t_{10}] \to [t_{12}]), t_3 \mapsto [t_{10}] \to [t_{12}], t_6 \mapsto [t_{10}] \to [t_{10}], t_{11} \mapsto t_{10}, t_7 \mapsto [t_{10}], t_4 \mapsto [t_{10}], t_{13} \mapsto t_{12}, t_9 \mapsto [t_{12}], t_5 \mapsto [t_{12}], t_2 \to t_{10} \to t_{12}]$

[1] Fixeu-vos que per conveniència hem triat de resoldre la primera equació com $t_{11} \mapsto t_{10}$ enlloc de $t_{10} \mapsto t_{11}$. Ambdues possibilitats són correctes.

COMPTE els parèntesis que apareixen al substituir t_2 per $t_{10} \rightarrow t_{12}$ a la substitució de t_1 són imprescindibles. Si no els poséssim l'associativitat dreta de $\rightarrow$ canviaria el significat del tipus!!!
Les equacions queden:

$$\begin{array}{ll} 1) & 5) \\ 2) & 6) \\ 3) & 7) \\ 4) & 8) \quad t_{14} \stackrel{?}{=} [t_{10}] \rightarrow [t_{12}] \\ & 9) \quad (t_{10} \rightarrow t_{12}) \rightarrow ([t_{10}] \rightarrow [t_{12}]) \stackrel{?}{=} (t_{10} \rightarrow t_{12}) \rightarrow t_{14} \end{array}$$

Resolem la 8 i obtenim $t_{14} \mapsto [t_{10}] \rightarrow [t_{12}]$ i ens queda: $\sigma = [t_1 \mapsto (t_{10} \rightarrow t_{12}) \rightarrow ([t_{10}] \rightarrow [t_{12}]), t_3 \mapsto [t_{10}] \rightarrow [t_{12}], t_6 \mapsto [t_{10}] \rightarrow [t_{10}], t_{11} \mapsto t_{10}, t_7 \mapsto [t_{10}], t_4 \mapsto [t_{10}], t_{13} \mapsto t_{12}, t_9 \mapsto [t_{12}], t_5 \mapsto [t_{12}], t_2 \rightarrow t_{10} \rightarrow t_{12}, t_{14} \mapsto [t_{10}] \rightarrow [t_{12}]]$

$$\begin{array}{ll} 1) & 5) \\ 2) & 6) \\ 3) & 7) \\ 4) & 8) \\ & 9) \quad (t_{10} \rightarrow t_{12}) \rightarrow ([t_{10}] \rightarrow [t_{12}]) \stackrel{?}{=} (t_{10} \rightarrow t_{12}) \rightarrow ([t_{10}] \rightarrow [t_{12}]) \end{array}$$

Com podem veure, l'equació 9 és trivial i no genera res.

Finalment resolem l'equació generada per les dues regles del map $s_1 \stackrel{?}{=} t_1$ que amb les substitucions que portàvem és: $s_2 \rightarrow [s_4] \rightarrow [s_5] \stackrel{?}{=} (t_{10} \rightarrow t_{12}) \rightarrow ([t_{10}] \rightarrow [t_{12}])$. Fixeu-vos que de la primera regla no sabem res del tipus del primer paràmetre de `map` mentre que del segon sabem que és una funció. Resolent ens queda: $[s_2 \mapsto t_{10} \rightarrow t_{12}, s_4 \mapsto t_{10}, s_5 \mapsto t_{12}]$, essent doncs el tipus de map el de $s_1 = t_1 = (t_{10} \rightarrow t_{12}) \rightarrow ([t_{10}] \rightarrow [t_{12}])$.