Sistemes de Reescriptura (09-10)

Mateu Villaret

IMA, UdG

05 d'octubre del 2009

Resum

Reescriptura des de l'escola ...

$$\boxed{(3+5) \times (1+2)}$$

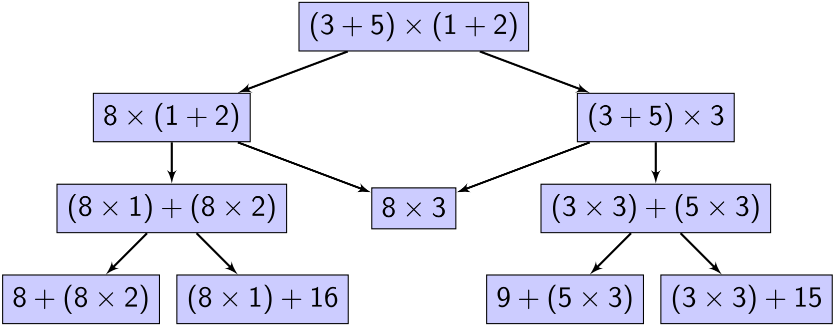
Reescriptura des de l'escola ...

$$\begin{tikzcd}
& \boxed{(3+5)\times(1+2)} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\boxed{8\times(1+2)} & & \boxed{(3+5)\times 3}
\end{tikzcd}$$

Reescriptura des de l'escola ...

$$
\begin{tikzcd}
 & (3+5)\times(1+2) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
8\times(1+2) \arrow[d] \arrow[dr] & & (3+5)\times 3 \arrow[dl] \arrow[d] \\
(8\times 1)+(8\times 2) & 8\times 3 & (3\times 3)+(5\times 3)
\end{tikzcd}
$$

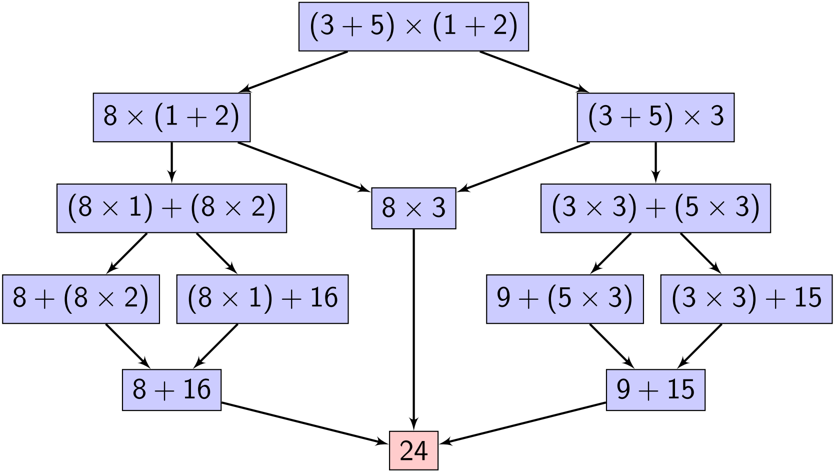
Reescriptura des de l'escola ...



Reescriptura des de l'escola ...

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & (3+5)\times(1+2) \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & 8\times(1+2) \arrow[d] \arrow[drr] & & & & (3+5)\times 3 \arrow[dll] \arrow[d] & \\
 & (8\times 1)+(8\times 2) \arrow[dl] \arrow[dr] & & 8\times 3 & & (3\times 3)+(5\times 3) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
8+(8\times 2) \arrow[dr] & & (8\times 1)+16 \arrow[dl] & & 9+(5\times 3) \arrow[dr] & & (3\times 3)+15 \arrow[dl] \\
 & 8+16 & & & & 9+15 &
\end{tikzcd}
$$

Reescriptura des de l'escola ...



Reescriptura des de l'escola ...

D'altres de quotidians com les hores del dia:

$$1 \to 2 \to \cdots \to 11 \to 12 \to 1 \to 2 \ldots$$

D'altres de més sofisticats:

$$n \to n' \text{ on } \quad \begin{cases} n' = n/2 & \text{si } n \text{ és parell (i } n > 1) \\ n' = 3n+1 & \text{si } n \text{ és senar (i } n > 1) \end{cases}$$

Reescriptura des de l'escola ...

D'altres de més sofisticats:

$$n \longrightarrow n' \text{ on } \quad \begin{cases} n' = n/2 & \text{si } n \text{ és parell (i } n > 1) \\ n' = 3n+1 & \text{si } n \text{ és senar (i } n > 1) \end{cases}$$

Per exemple:

$$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to \ldots$$

Reescriptura des de l'escola ...

D'altres de més sofisticats:

$$n \longrightarrow n' \text{ on } \quad \begin{cases} n' = n/2 & \text{si } n \text{ és parell (i } n > 1) \\ n' = 3n+1 & \text{si } n \text{ és senar (i } n > 1) \end{cases}$$

Per exemple:

$$7 \longrightarrow 22 \longrightarrow 11 \longrightarrow 34 \longrightarrow 17 \longrightarrow 52 \longrightarrow 26 \longrightarrow 13 \longrightarrow \dots$$
$$\longrightarrow 40 \longrightarrow 20 \longrightarrow 10 \longrightarrow 5 \longrightarrow 16 \longrightarrow 8 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$$

Reescriptura des de l'escola ...

D'altres de més sofisticats:

$$n \longrightarrow n' \text{ on } \quad \begin{cases} n' = n/2 & \text{si } n \text{ és parell (i } n > 1) \\ n' = 3n+1 & \text{si } n \text{ és senar (i } n > 1) \end{cases}$$

Problema obert:

És veritat, o no, que qualsevol enter s'acaba reduint a 1?
(Syracusa problem= Collatz's problem)

Definition

La *reescriptura* és un mecanisme abstracte per a la transformació pas a pas d'objectes d'acord amb unes regles.

La reescriptura (de termes) té aplicacions en:

- Programació funcional
- Sistemes de deducció automàtica

Exemples de Reescriptura: còmput

La reescriptura com a mecanisme de còmput

Regles aplicades en una sola direcció per calcular *formes normals*.
Programació funcional.

Exemples de Reescriptura: còmput

Exemple

$$\begin{array}{rcl} -(x,0) & \rightarrow & x \\ -(s(x),s(y)) & \rightarrow & -(x,y) \\ \div(\,0,\ s(y)\,) & \rightarrow & 0 \\ \div(\,s(x),\ s(y)\,) & \rightarrow & s(\,\div(\,-(x,y),\ s(y)\,)\,) \end{array}$$

Així per exemple podem calcular $\div(\,4,\ 2\,)$:

Exemples de Reescriptura: còmput

Exemple

$$\begin{array}{rcl} -(x,0) & \rightarrow & x \\ -(s(x),s(y)) & \rightarrow & -(x,y) \\ \div(\,0,\,s(y)\,) & \rightarrow & 0 \\ \div(\,s(x),\,s(y)\,) & \rightarrow & s(\,\div(\,-(x,y),\,s(y)\,)\,) \end{array}$$

Així per exemple podem calcular $\div(\,4,\,2\,)$:

$$\div\,(\,4,\,2\,) \;\; \rightarrow \;\; s(\div(\,-(3,1),\,2\,))$$

Exemples de Reescriptura: còmput

Exemple

$$\begin{array}{rcl} -(x,0) & \rightarrow & x \\ -(s(x),s(y)) & \rightarrow & -(x,y) \\ \div(\,0,\ s(y)\,) & \rightarrow & 0 \\ \div(\,s(x),\ s(y)\,) & \rightarrow & s(\,\div(\,-(x,y),\ s(y)\,)\,) \end{array}$$

Així per exemple podem calcular $\div(\,4,\ 2\,)$:

$$\begin{array}{rcl} \div\,(\,4,\ 2\,) & \rightarrow & s(\div(\,-(3,1),\ 2\,)) \\ & \rightarrow & s(\div(\,-(2,0),\ 2\,)) \end{array}$$

Exemples de Reescriptura: còmput

Exemple

$$
\begin{array}{rcl}
-(x,0) & \rightarrow & x \\
-(s(x),s(y)) & \rightarrow & -(x,y) \\
\div(\,0,\ s(y)\,) & \rightarrow & 0 \\
\div(\,s(x),\ s(y)\,) & \rightarrow & s(\,\div(\,-(x,y),\ s(y)\,)\,)
\end{array}
$$

Així per exemple podem calcular $\div(\,4,\ 2\,)$:

$$
\begin{array}{rcl}
\div\,(\,4,\ 2\,) & \rightarrow & s(\div(\,-(3,1),\ 2\,)) \\
 & \rightarrow & s(\div(\,-(2,0),\ 2\,)) \\
 & \rightarrow & s(\div(\,2,\ 2\,))
\end{array}
$$

Exemples de Reescriptura: còmput

Exemple

$$\begin{array}{rcl} -(x,0) & \rightarrow & x \\ -(s(x),s(y)) & \rightarrow & -(x,y) \\ \div(\,0,\ s(y)\,) & \rightarrow & 0 \\ \div(\,s(x),\ s(y)\,) & \rightarrow & s(\,\div(\,-(x,y),\ s(y)\,)\,) \end{array}$$

Així per exemple podem calcular $\div(\,4,\ 2\,)$:

$$\begin{array}{rcl} \div\,(\,4,\ 2\,) & \rightarrow & s(\div(\,-(3,1),\ 2\,)) \\ & \rightarrow & s(\div(\,-(2,0),\ 2\,)) \\ & \rightarrow & s(\div(\,2,\ 2\,)) \\ & \rightarrow & s(s(\div(\,-(1,1),\ 2\,))) \end{array}$$

Exemples de Reescriptura: còmput

Exemple

$$
\begin{array}{rcl}
-(x,0) & \rightarrow & x \\
-(s(x),s(y)) & \rightarrow & -(x,y) \\
\div(\,0,\ s(y)\,) & \rightarrow & 0 \\
\div(\,s(x),\ s(y)\,) & \rightarrow & s(\,\div(\,-(x,y),\ s(y)\,)\,)
\end{array}
$$

Així per exemple podem calcular $\div(\,4,\ 2\,)$:

$$
\begin{array}{rcl}
\div\,(\,4,\ 2\,) & \rightarrow & s(\div(\,-(3,1),\ 2\,)) \\
 & \rightarrow & s(\div(\,-(2,0),\ 2\,)) \\
 & \rightarrow & s(\div(\,2,\ 2\,)) \\
 & \rightarrow & s(s(\div(\,-(1,1),\ 2\,))) \\
 & \rightarrow & s(s(\div(\,-(0,0),\ 2\,)))
\end{array}
$$

Exemples de Reescriptura: còmput

Exemple

$$\begin{array}{rcl} -(x,0) & \rightarrow & x \\ -(s(x),s(y)) & \rightarrow & -(x,y) \\ \div(\,0,\; s(y)\,) & \rightarrow & 0 \\ \div(\,s(x),\; s(y)\,) & \rightarrow & s(\,\div(\,-(x,y),\; s(y)\,)\,) \end{array}$$

Així per exemple podem calcular $\div(\,4,\; 2\,)$:

$$\begin{array}{rcl} \div\,(\,4,\; 2\,) & \rightarrow & s(\div(\,-(3,1),\; 2\,)) \\ & \rightarrow & s(\div(\,-(2,0),\; 2\,)) \\ & \rightarrow & s(\div(\,2,\; 2\,)) \\ & \rightarrow & s(s(\div(\,-(1,1),\; 2\,))) \\ & \rightarrow & s(s(\div(\,-(0,0),\; 2\,))) \\ & \rightarrow & s(s(\div(\,0,\; 2\,))) \end{array}$$

Exemples de Reescriptura: còmput

Exemple

$$
\begin{array}{rcl}
-(x, 0) & \rightarrow & x \\
-(s(x), s(y)) & \rightarrow & -(x, y) \\
\div(\, 0,\ s(y)\,) & \rightarrow & 0 \\
\div(\, s(x),\ s(y)\,) & \rightarrow & s(\, \div(\, -(x, y),\ s(y)\,)\,)
\end{array}
$$

Així per exemple podem calcular $\div(\,4,\ 2\,)$:

$$
\begin{array}{rcl}
\div\,(\,4,\ 2\,) & \rightarrow & s(\div(\,-(3,1),\ 2\,)) \\
& \rightarrow & s(\div(\,-(2,0),\ 2\,)) \\
& \rightarrow & s(\div(\,2,\ 2\,)) \\
& \rightarrow & s(s(\div(\,-(1,1),\ 2\,))) \\
& \rightarrow & s(s(\div(\,-(0,0),\ 2\,))) \\
& \rightarrow & s(s(\div(\,0,\ 2\,))) \\
& \rightarrow & s(s(0)) = 2
\end{array}
$$

Exemples de Reescriptura: deducció

La reescriptura com a mecanisme de deducció

Regles aplicades en ambdues direccions i que defineixen classes d'equivalència.
Raonament equacional en deducció automàtica.

Exemples de Reescriptura: deducció

Exemple

En Àlgebra, els grups són conjunts equipats amb una operació binària $\circ$, una d'unària i i un element especial e que satisfan:

$$\begin{array}{lrcl} (G1) & (x \circ y) \circ z & \approx & x \circ (y \circ z), \\ (G2) & e \circ x & \approx & x, \\ (G3) & i(x) \circ x & \approx & e \end{array}$$

Exemples de Reescriptura: deducció

Exemple

$$\begin{array}{llcl} (G1) & (x \circ y) \circ z & \approx & x \circ (y \circ z), \\ (G2) & e \circ x & \approx & x, \\ (G3) & i(x) \circ x & \approx & e \end{array}$$

Podem demostrar que $e \approx x \circ i(x)$?

Exemples de Reescriptura: deducció

Exemple

$$
\begin{array}{lrcl}
(G1) & (x \circ y) \circ z & \approx & x \circ (y \circ z), \\
(G2) & e \circ x & \approx & x, \\
(G3) & i(x) \circ x & \approx & e
\end{array}
$$

Podem demostrar que $e \approx x \circ i(x)$?

$$
\begin{array}{rcl}
e & \overset{G3}{\approx} & i(x \circ i(x)) \circ (x \circ i(x)) \\
 & \overset{G2}{\approx} & i(x \circ i(x)) \circ (x \circ (e \circ i(x))) \\
 & \overset{G3}{\approx} & i(x \circ i(x)) \circ (x \circ ((i(x) \circ x) \circ i(x))) \\
 & \overset{G1}{\approx} & i(x \circ i(x)) \circ ((x \circ (i(x) \circ x)) \circ i(x)) \\
 & \overset{G1}{\approx} & i(x \circ i(x)) \circ (((x \circ i(x)) \circ x) \circ i(x)) \\
 & \overset{G1}{\approx} & i(x \circ i(x)) \circ ((x \circ i(x)) \circ (x \circ i(x))) \\
 & \overset{G1}{\approx} & (i(x \circ i(x)) \circ (x \circ i(x))) \circ (x \circ i(x)) \\
 & \overset{G3}{\approx} & e \circ (x \circ i(x)) \\
 & \overset{G2}{\approx} & x \circ i(x)
\end{array}
$$

Exemples de Reescriptura: deducció

Word Problem

Donat un conjunt d'identitats E i dos termes s i t, podem transformar s en t utilitzant E com a regles de reescriptura en ambdues direccions?

Exemples de Reescriptura: deducció

Word Problem

Donat un conjunt d'identitats E i dos termes s i t, podem transformar s en t utilitzant E com a regles de reescriptura en ambdues direccions?

Agafar el conjunt d'identitats i transformar-les en sistemes de reescriptura en una direcció de manera que "simplifiquin":

$$\begin{array}{lrcl} (R1) & (x \circ y) \circ z & \rightarrow & x \circ (y \circ z), \\ (R2) & e \circ x & \rightarrow & x, \\ (R3) & i(x) \circ x & \rightarrow & e \end{array}$$

Ara agafar s i t i mirar si tenen la mateixa forma normal.

Exemples de Reescriptura: deducció

Word Problem

Donat un conjunt d'identitats E i dos termes s i t, podem transformar s en t utilitzant E com a regles de reescriptura en ambdues direccions?

Agafar el conjunt d'identitats i transformar-les en sistemes de reescriptura en una direcció de manera que "simplifiquin":

$$
\begin{array}{lrcl}
(R1) & (x \circ y) \circ z & \rightarrow & x \circ (y \circ z), \\
(R2) & e \circ x & \rightarrow & x, \\
(R3) & i(x) \circ x & \rightarrow & e
\end{array}
$$

Ara agafar s i t i mirar si tenen la mateixa forma normal.

- Termes equivalents poden tenir formes normals diferents!!! (confluència?)
- Els termes poden no tenir forma normal!!! (acabament?)

Perspectiva Històrica

- Orígens: 1930's amb el λ-càlcul i *combinatory logic*: ambdós capturen la noció de computabilitat.
- Mes endavant amb els llenguatges de programació, l'especificació equacional dels tipus abstractes de dades, es desenvolupa l'estudi del TRS.
- Conferències dedicades directament: RTA, TLCA.
- Open problems list! `http://rtaloop.pps.jussieu.fr/`

Resum

Abstract Rewriting System: $(A, \rightarrow)$

Reducció= recorregut sobre un graf dirigit, execució pas a pas d'un còmput, transformació gradual d'algun objecte, ...
Matemàticament parlem de relacions binaries.
Un ARS és:

$$(A, \rightarrow)$$

on:

- A és un conjunt,
- la **reducció** $\rightarrow$ és una relació binaria sobre A, $\rightarrow \subseteq A \times A$,
- enlloc de $(a, b) \in \rightarrow$, escriurem $a \rightarrow b$.

Abstract Rewriting System: $(A, \rightarrow)$

Reducció= recorregut sobre un graf dirigit, execució pas a pas d'un còmput, transformació gradual d'algun objecte, ...
Matemàticament parlem de relacions binaries.
Un ARS és:

$$(A, \rightarrow)$$

on:

- A és un conjunt,
- la **reducció** $\rightarrow$ és una relació binaria sobre A, $\rightarrow \subseteq A \times A$,
- enlloc de $(a, b) \in \rightarrow$, escriurem $a \rightarrow b$.

Example

- $A = \mathcal{N} - \{0, 1\}$,
- $\rightarrow\ =\ \{(m, n) | m > n\ \wedge\ m \bmod n = 0\}$

Definicions bàsiques

Definition

Donades dues relacions $R \subseteq A \times B$ i $S \subseteq B \times C$,

$$R \circ S \;=\; \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B.\ (x, y) \in R \;\wedge (y, z) \in S\}$$

Definicions bàsiques

Definition

$\xrightarrow{0}$	$=$	$\{(x,x) \mid x \in A\}$	**identitat**
$\xrightarrow{i+1}$	$=$	$\xrightarrow{i} \circ \rightarrow$	$i+1$**-composició** $i \geq 0$
$\xrightarrow{+}$	$=$	$\cup_{i>0} \xrightarrow{i}$	**clausura transitiva**
$\xrightarrow{=}$	$=$	$\rightarrow \cup \xrightarrow{0}$	**clausura reflexiva**
$\xrightarrow{*}$	$=$	$\xrightarrow{+} \cup \xrightarrow{0}$	**clausura reflexiva i transitiva**
$\xrightarrow{-1}$	$=$	$\{(y,x) \mid x \rightarrow y\}$	**inversa**
$\leftarrow$	$=$	$\xrightarrow{-1}$	**inversa**
$\leftrightarrow$	$=$	$\rightarrow \cup \leftarrow$	**clausura simètrica**
$\overset{+}{\leftrightarrow}$	$=$	$(\leftrightarrow)^+$	**clausura simètrica i transitiva**
$\overset{*}{\leftrightarrow}$	$=$	$(\leftrightarrow)^*$	**clausura reflexiva, simètrica i transitiva**

Definicions bàsiques: exemple

Definim la relació binaria $\mathcal{R}$ sobre $\{1,2,3,4,5\}$ com a $\{(1,2),(1,3),(2,4)\}$

$$\mathcal{R} \;=\; \{(1,2),(1,3),(2,4)\}$$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

Definicions bàsiques: exemple

Definim la relació binaria $\mathcal{R}$ sobre $\{1,2,3,4,5\}$ com a $\{(1,2),(1,3),(2,4)\}$

$$\mathcal{R}^+ = \{(1,2),(1,3),(2,4),(1,4)\}$$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

Definicions bàsiques: exemple

Definim la relació binaria $\mathcal{R}$ sobre $\{1,2,3,4,5\}$ com a $\{(1,2),(1,3),(2,4)\}$

$$\mathcal{R}^0 \;=\; \mathcal{R} \cup \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

Definicions bàsiques: exemple

Definim la relació binaria $\mathcal{R}$ sobre $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ com a $\{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$

$$\mathcal{R}^* \; = \; \mathcal{R} \cup \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

Definicions bàsiques: exemple

Definim la relació binaria $\mathcal{R}$ sobre $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ com a $\{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$

$$\mathcal{R}^{-1} \;=\; \{(2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

Definicions bàsiques: exemple

Definim la relació binaria $\mathcal{R}$ sobre $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ com a $\{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$

$$\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} \;=\; \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

Definicions bàsiques: exemple

Definim la relació binaria $\mathcal{R}$ sobre $\{1,2,3,4,5\}$ com a $\{(1,2),(1,3),(2,4)\}$

$$(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1})^{+} \; = \; \{\ldots\}$$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

Definicions bàsiques: exemple

Definim la relació binaria $\mathcal{R}$ sobre $\{1,2,3,4,5\}$ com a $\{(1,2),(1,3),(2,4)\}$

$$(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1})^* \;=\; \{\dots\}$$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

Definicions bàsiques: terminologia

Terminologia:

- x és **reduïble** sii existeix una y tal que $x \longrightarrow y$

Definicions bàsiques: terminologia

Terminologia:

- x és **reduïble** sii existeix una y tal que $x \longrightarrow y$
- x **està en forma normal (irreduible)** sii no és reduïble

Definicions bàsiques: terminologia

Terminologia:

- x és **reduïble** sii existeix una y tal que $x \rightarrow y$
- x **està en forma normal (irreduible)** sii no és reduïble
- y **és una forma normal de** x sii $x \xrightarrow{*} y$ i y està en forma normal; si x té una única forma normal determinada, aquesta s'escriu $x\downarrow$

Definicions bàsiques: terminologia

Terminologia:

- x és **reduïble** sii existeix una y tal que $x \rightarrow y$
- x **està en forma normal (irreduible)** sii no és reduïble
- y **és una forma normal de** x sii $x \xrightarrow{*} y$ i y està en forma normal; si x té una única forma normal determinada, aquesta s'escriu $x\downarrow$
- y és un **successor de** x sii $x \xrightarrow{+} y$

Definicions bàsiques: terminologia

Terminologia:

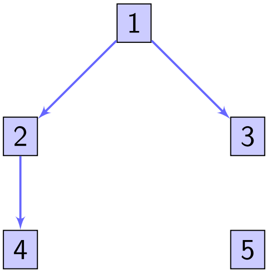
- x és **reduïble** sii existeix una y tal que $x \rightarrow y$
- x **està en forma normal (irreduible)** sii no és reduïble
- y **és una forma normal de** x sii $x \xrightarrow{*} y$ i y està en forma normal; si x té una única forma normal determinada, aquesta s'escriu $x\downarrow$
- y és un **successor de** x sii $x \xrightarrow{+} y$
- x i y es poden **ajuntar (joinable)** sii existeix z tal que $x \xrightarrow{*} z \xleftarrow{*} y$; ho escriurem $x \downarrow y$

Definicions bàsiques: continuació de l'exemple

La relació

$$\mathcal{R} = \{(1,2),(1,3),(2,4)\}$$

i la seva clausura reflexiva, transitiva i simètrica, es pot representar també com un graf dirigit.

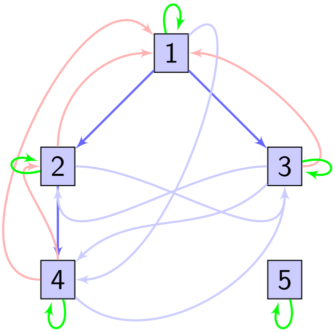


Definicions bàsiques: continuació de l'exemple

La relació

$$\mathcal{R} = \{(1,2),(1,3),(2,4)\}$$

i la seva clausura reflexiva, transitiva i simètrica, es pot representar també com un graf dirigit.



Definicions bàsiques: nocions centrals

Definition

Una relació $\rightarrow$ s'anomena:

Church-Rosser	sii	$x \overset{*}{\leftrightarrow} y \implies x \downarrow y$
confluent	sii	$y_1 \overset{*}{\leftarrow} x \overset{*}{\rightarrow} y_2 \implies y_1 \downarrow y_2$
semi-confluent	sii	$y_1 \leftarrow x \overset{*}{\rightarrow} y_2 \implies y_1 \downarrow y_2$
de terminació	sii	no hi ha cap cadena infinita: $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow \ldots$
normalitzant	sii	tot element te forma normal
convergent	sii	és confluent i de terminació

Definicions bàsiques: representació gràfica

En les següent representacions gràfiques, les línies "sòlides" representen universals i les retallades existencials.
Cada diagrama representa la implicació de la definició corresponent.

Church-Rosser:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, leftrightarrow, "*"] \arrow[dr, dashed, "*"'] & & y \arrow[dl, dashed, "*"] \\ & z & \end{tikzcd}$$

Confluent:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "*"] \arrow[d, "*"'] & y_1 \arrow[d, dashed, "*"] \\ y_2 \arrow[r, dashed, "*"'] & z \end{tikzcd}$$

Semi-confluent:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[d, "*"'] & y_1 \arrow[d, dashed, "*"] \\ y_2 \arrow[r, dashed, "*"'] & z \end{tikzcd}$$

Church-Rosser: la propietat desitjada

Church-Rosser és el que anavem buscant:

Poder comprovar equivalència mitjançant la cerca d'un successor comú

Church-Rosser: la propietat desitjada

Church-Rosser és el que anavem buscant:

Poder comprovar equivalència mitjançant la cerca d'un successor comú

Theorem (CR=Confluent)

Les següents condicions són equivalents:

1. $\to$ *és Church-Rosser*
2. $\to$ *és confluent*
3. $\to$ *és semi-confluent*

Church-Rosser i confluència equivalents, diagramaticalment

Assumint confluència i considerant l'equivalència:

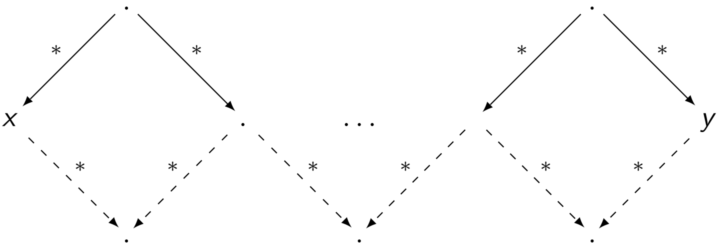
$$x \overset{*}{\leftrightarrow} y \;\equiv\; x \overset{*}{\leftarrow} . \overset{*}{\rightarrow} \ldots \overset{*}{\leftarrow} . \overset{*}{\rightarrow} y$$

$$\begin{tikzcd}
 & . \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & & & & . \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\
x & & . & \ldots & {} & & y
\end{tikzcd}$$

Church-Rosser i confluència equivalents, diagramaticalment

Assumint confluència i considerant l'equivalència:

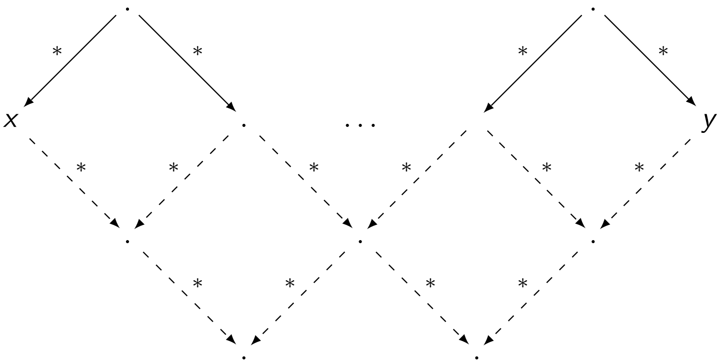
$$x \overset{*}{\leftrightarrow} y \;\equiv\; x \overset{*}{\leftarrow} . \overset{*}{\rightarrow} \ldots \overset{*}{\leftarrow} . \overset{*}{\rightarrow} y$$



Church-Rosser i confluència equivalents, diagramaticalment

Assumint confluència i considerant l'equivalència:

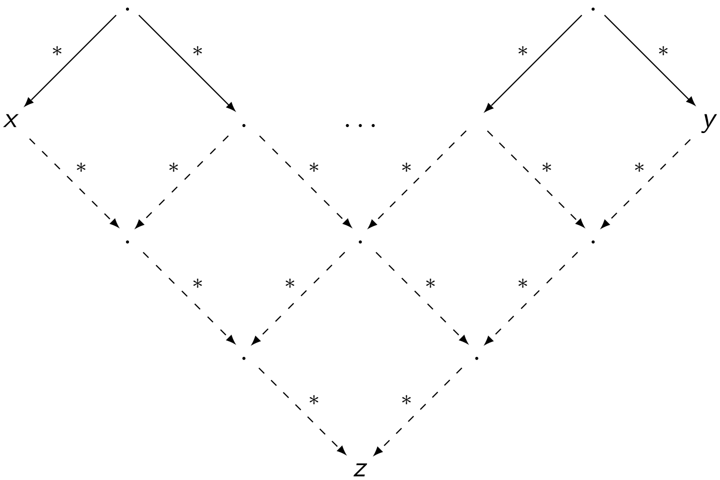
$$x \overset{*}{\leftrightarrow} y \;\equiv\; x \overset{*}{\leftarrow} . \overset{*}{\rightarrow} \ldots \overset{*}{\leftarrow} . \overset{*}{\rightarrow} y$$



Church-Rosser i confluència equivalents, diagramaticalment

Assumint confluència i considerant l'equivalència:

$$x \overset{*}{\leftrightarrow} y \;\equiv\; x \overset{*}{\leftarrow} . \overset{*}{\rightarrow} \ldots \overset{*}{\leftarrow} . \overset{*}{\rightarrow} y$$



Demostració

Demostració del teorema anterior: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

$(1 \Rightarrow 2)$: si $\rightarrow$ és CR i $y_1 \xleftarrow{*} x \xrightarrow{*} y_2$ llavors $y_1 \xleftrightarrow{*} y_2$ i per CR $y_1 \downarrow y_2$, per tant $\rightarrow$ és confluent.

Demostració

Demostració del teorema anterior: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

(1 ⇒ 2): si $\rightarrow$ és CR i $y_1 \xleftarrow{*} x \xrightarrow{*} y_2$ llavors $y_1 \xleftrightarrow{*} y_2$ i per CR $y_1 \downarrow y_2$, per tant $\rightarrow$ és confluent.

(2 ⇒ 3): obvi.

Demostració

Demostració del teorema anterior: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

$(1 \Rightarrow 2)$: si $\rightarrow$ és CR i $y_1 \xleftarrow{*} x \xrightarrow{*} y_2$ llavors $y_1 \overset{*}{\leftrightarrow} y_2$ i per CR $y_1 \downarrow y_2$, per tant $\rightarrow$ és confluent.

$(2 \Rightarrow 3)$: obvi.

$(3 \Rightarrow 1)$: si $\rightarrow$ és semi-conf. i $x \overset{*}{\leftrightarrow} y$ demostrarem $x \downarrow y$, (CR), per inducció en la llargada de $x \overset{*}{\leftrightarrow} y$.

Demostració

Demostració del teorema anterior: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

$(1 \Rightarrow 2)$: si $\rightarrow$ és CR i $y_1 \xleftarrow{*} x \xrightarrow{*} y_2$ llavors $y_1 \overset{*}{\leftrightarrow} y_2$ i per CR $y_1 \downarrow y_2$, per tant $\rightarrow$ és confluent.

$(2 \Rightarrow 3)$: obvi.

$(3 \Rightarrow 1)$: si $\rightarrow$ és semi-conf. i $x \overset{*}{\leftrightarrow} y$ demostrarem $x \downarrow y$, (CR), per inducció en la llargada de $x \overset{*}{\leftrightarrow} y$.

- Cas base: $x = y$, trivial.

Demostració

Demostració del teorema anterior: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

$(1 \Rightarrow 2)$: si $\rightarrow$ és CR i $y_1 \overset{*}{\leftarrow} x \overset{*}{\rightarrow} y_2$ llavors $y_1 \overset{*}{\leftrightarrow} y_2$ i per CR $y_1 \downarrow y_2$, per tant $\rightarrow$ és confluent.

$(2 \Rightarrow 3)$: obvi.

$(3 \Rightarrow 1)$: si $\rightarrow$ és semi-conf. i $x \overset{*}{\leftrightarrow} y$ demostrarem $x \downarrow y$, (CR), per inducció en la llargada de $x \overset{*}{\leftrightarrow} y$.

- Cas base: $x = y$, trivial.
- Cas inductiu: $x \overset{*}{\leftrightarrow} y \leftrightarrow y'$, per HI sabem que $x \downarrow y$, per tant existeix $z : x \overset{*}{\rightarrow} z \overset{*}{\leftarrow} y$. Demostrem que $x \downarrow y'$ per casos:

Demostració

Demostració del teorema anterior: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

$(1 \Rightarrow 2)$: si $\rightarrow$ és CR i $y_1 \xleftarrow{*} x \xrightarrow{*} y_2$ llavors $y_1 \xleftrightarrow{*} y_2$ i per CR $y_1 \downarrow y_2$, per tant $\rightarrow$ és confluent.

$(2 \Rightarrow 3)$: obvi.

$(3 \Rightarrow 1)$: si $\rightarrow$ és semi-conf. i $x \xleftrightarrow{*} y$ demostrarem $x \downarrow y$, (CR), per inducció en la llargada de $x \xleftrightarrow{*} y$.

- Cas base: $x = y$, trivial.
- Cas inductiu: $x \xleftrightarrow{*} y \leftrightarrow y'$, per HI sabem que $x \downarrow y$, per tant existeix $z : x \xrightarrow{*} z \xleftarrow{*} y$. Demostrem que $x \downarrow y'$ per casos:
  - $y \leftarrow y'$: $x \downarrow y'$ es deriva directament ja que $x \downarrow y$
  - $y \rightarrow y'$: per semi-conf tenim $z \downarrow y'$ i per tant $x \downarrow y'$

Conseqüències del teorema

La confluència sola no garanteix que sigui factible decidir equivalència: si la relació no és de terminació...
Els següents resultats acaben el dibuix:

Fact

- *Si $\rightarrow$ és confluent, cada element te com a molt una única forma normal.*
- *Si $\rightarrow$ és normalitzant i confluent, cada element te una única forma normal.*

Theorem (Confluent i normalitzant)

Si $\rightarrow$ és confluent i normalitzant llavors $x \overset{*}{\leftrightarrow} y \Leftrightarrow x\downarrow = y\downarrow$.

Conseqüències del teorema

Així el test d'equivalència tinguent confluència és: testejar si la forma normal dels dos elements són idèntiques. Serà decidible si les formes normals són computables i la identitat també.
La terminació també ens ajuda:

Theorem

Si $\rightarrow$ *és convergent llavors* $x \overset{*}{\leftrightarrow} y \Leftrightarrow x\downarrow = y\downarrow$.

Exercicis (i)

Donades les següent dues relacions de reescriptura:

1. Sigui $A = \mathcal{N} - \{0, 1\}$. Definim

$$\rightarrow \; = \; \{(m, n) | m > n \; \wedge \; m \bmod n = 0\}$$

2. Sigui $A = \{a, b\}^*$ (les paraules sobre l'alphabet a, b). Definim

$$\rightarrow \; = \; \{(ubav, uabv) | \; u, v \in A\}$$

- Explica què significa en cadascuna d'elles que: un element està en forma normal, un element és forma normal d'un altre i que siguin "joinable".
- Digues també i justifica-ho, si són d'acabament, Church-Rosser i confluents.

Exercicis (ii)

Fes les següents demostracions:

3. Demostra el teorema "Confluent i normalitzant" i els fets precedents.
4. Demostra que $\rightarrow$ és confluent i normalitzant sii cada element te una única forma normal.
5. Demostra diagramaticalment els dos casos del pas d'inducció de la demo del teorema CR=Confluent.

Resum

Sistemes de reescriptura de termes (de primer-ordre) (TRS).

La regla de reducció es presenta esquemàticament:

$$x + 0 \rightarrow x$$

Sistemes de reescriptura de termes (de primer-ordre) (TRS).

La regla de reducció es presenta esquemàticament:

$$x + 0 \to x$$

de manera que podem reduir per quasevol substitució, p.ex. $[x \mapsto 1]$:

$$\underline{1 + 0} \to \underline{1}$$

Sistemes de reescriptura de termes (de primer-ordre) (TRS).

La regla de reducció es presenta esquemàticament:

$$x + 0 \rightarrow x$$

de manera que podem reduir per quasevol substitució, p.ex. $[x \mapsto 1]$:

$$\underline{1 + 0} \rightarrow \underline{1}$$

i ho podem fer en qualsevol contexte:

$$1 + (\underline{3 + 0}) * 4 \rightarrow 1 + \underline{3} + 4$$

Reescriptura de termes

- Conceptes bàsics: Signatura, termes, contextos, substitucions, matching, unificació, ...
- Definició de TRS
- Reducció
- Sistemes equacionals; semàntica
- TRS complerts i el "word problem"
- Solapament i parells crítics

Termes (i)

Definition

- Una **Signatura** és un conjunt no buit de **símbols de funció** $f, g, a, \ldots$ amb una **aritat** cadascun. Els símbols 0-aris també s'anomenen **constants**.
- Les **variables** són un conjunt infinit *Var* de símbols disjunts de la signatura $x, y, \ldots$
- El conjunt de **termes** sobre una signatura Σ, $T(\Sigma)$ és defineix:
  - $x \in T(\Sigma)$ per tot $x \in Var$.
  - si $f \in \Sigma$ és n-aria i $t_1, \ldots, t_n \in T(\Sigma)$ llavors $f(t_1, \ldots, t_n) \in T(\Sigma)$.
    t_i són els **arguments** i f el **cap** o **arrel**.
    Enlloc de $a()$ escriurem a.

Termes (ii)

Definition

- Termes sense variables són **ground**.
- Termes sense variables repetides són **lineals**.
- $Var(t)$ són les variables que occorren a t.
- La **llargada** o **tamany** d'un terme és el número d'occurrències de símbols de funció i variables del terme.

Example

Alguns termes i alguns no termes: $\Sigma = \{f_2, h_1, a_0, b_0\}$ Termes:

$$f(f(x, h(a)), f(x, a)) \qquad x \qquad h(x, y) \qquad a \qquad f(f(a, b), a)$$

"no termes":

$$f(f(a), b) \qquad x(a) \qquad f \qquad a(b)$$

Termes (iii)

Definicions “auxiliars”:

Definition

- Un **contexte** és un terme $C \in T(\Sigma \cup \{\bullet\})$ on $\bullet$ és una nova constant: **forat**. ($C[\,]$)
- Si C te n forats i $t_1, \ldots, t_n$ són termes, $C[t_1, \ldots, t_n]$ és el terme C on es substitueixen els n forats pels n t's d'esquerra a dreta.
- Si $t = C[t_1, \ldots, t_n]$ i $n \geq 1$ diem que C és un **prefixe** de t i cada t_i un **subterme** de t, $t_i \leq t$ (és **propi** si $C \neq \bullet$).
- sigui t un terme i $t = C(s) = D(s)$ i $C \neq D$ llavors s **occorre** com a mínim 2 cops a t: $\langle s|C\rangle$ i $\langle s|D\rangle$. Anàlogament per símbols de funció.

Termes (iv)

Example

Considerem el terme:

$$t = g\big(\ f(a, b),\ \ h(f(a, b)),\ \ f(h(a), h(a))\big)$$

Per definició:

$$g\big(\ f(\bullet, b),\ \ h(\bullet),\ \ f(h(a), \bullet)\big)[a, f(a, b), h(a)]$$

Així, el subterme a occorre diversos cops, el podem situar gràcies als contextes:

$$\begin{array}{ll} \langle a, & g\big(\ f(\bullet, b),\ \ h(f(a, b)),\ \ f(h(a), h(a))\big)\rangle \\ \langle a, & g\big(\ f(a, b),\ \ h(f(\bullet, b)),\ \ f(h(a), h(a))\big)\rangle \\ \ldots & \end{array}$$

Termes (v)

Exercicis:

1. Definiu els contextes d'un sol forat inductivament.
2. Definiu $C[t]$ recursivament.
3. Donades dues ocurrències $\langle s|C[]\rangle$ i $\langle s'|C'[]\rangle$ a t, definiu:
   - $\langle s|C[]\rangle \leq \langle s'|C'[]\rangle$, **contingut**
   - $\langle s|C[]\rangle$ **disjunt** de $\langle s'|C'[]\rangle$

Termes-Arbres (i)

Definition

Podem representar els termes com a **arbres finits etiquetats**:

- les variables i les constants són arbres d'un sol node etiquetat amb la variable o constant
- el terme $f(t_1, \ldots, t_n)$ serà un arbre amb f com a etiqueta de l'arrel i $t_1, \ldots, t_n$ com a subarbres directes d'esquerra a dreta.

Ens referim als nodes de l'arbre amb **posicions** especificades amb seqüències d'enters:

- la posició arrel d'un arbre és la seqüència buida ϵ
- sigui t un terme i $f(t_1, \ldots, t_n)$ un subterme de t a la posició π, llavors t_i està a la posició $\pi\, i$ de t, de fet $t|_{(\pi\, i)} = t_i$.

Termes-Arbres (ii)

Example

Considerem el terme:

$$t = g(\ f(a, b),\ h(f(a, b)),\ f(h(a), h(a)))$$

Tenim, $t|_{11} = a$, $t|_{21} = f(a, b)$ i $t|_{32} = h(a)$ són subtermes de t. De fet, $t|_{31} = t|_{32}$.

Exercicis:

4. Definiu inductivament $t|_p$.
5. Verifiqueu que $t|_p \leq t|_q$ sii $q \leq p$ (prefixe de paraules)
6. Demostreu que $t|_{p\,q} = t|_p|_q$

Termes-Substitucions (i)

Definition

Una **substitució** és una funció $\sigma : T(\Sigma) \to T(\Sigma)$ tal que:

$$\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$$

i canvia les variables per termes. També es defineix com a una funció $\sigma : Var \to T(\Sigma)$, i es descriu extensionalment com a $\sigma = [x_1 \to t_1, \ldots, x_n \to t_n]$ amb $t_i \neq x_i$, aquestes x_i són el **domini** de σ, $Dom(\sigma)$.
Si $s = \sigma(t)$ diem que s és una **instància** de t.

Termes-Substitucions (i)

Definition

Una **substitució** és una funció $\sigma : T(\Sigma) \rightarrow T(\Sigma)$ tal que:

$$\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$$

i canvia les variables per termes. També es defineix com a una funció $\sigma : Var \rightarrow T(\Sigma)$, i es descriu extensionalment com a $\sigma = [x_1 \rightarrow t_1, \ldots, x_n \rightarrow t_n]$ amb $t_i \neq x_i$, aquestes x_i són el **domini** de σ, $Dom(\sigma)$.
Si $s = \sigma(t)$ diem que s és una **instància** de t.

Example

Sigui $\sigma = [x \mapsto f(a, b), y \mapsto h(z), z \mapsto a]$, tenim

$$\sigma(\quad g(\quad z, \quad h(y), \qquad f(x, x) \qquad\qquad)) =$$

Termes-Substitucions (i)

Definition

Una **substitució** és una funció $\sigma : T(\Sigma) \to T(\Sigma)$ tal que:

$$\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$$

i canvia les variables per termes. També es defineix com a una funció $\sigma : Var \to T(\Sigma)$, i es descriu extensionalment com a $\sigma = [x_1 \to t_1, \ldots, x_n \to t_n]$ amb $t_i \neq x_i$, aquestes x_i són el **domini** de σ, $Dom(\sigma)$.
Si $s = \sigma(t)$ diem que s és una **instància** de t.

Example

Sigui $\sigma = [x \mapsto f(a, b), y \mapsto h(z), z \mapsto a]$, tenim

$$\begin{array}{llll} \sigma(& g(z, & h(y), & f(x, x))) = \\ & g(a, & h(h(z)), & f(f(a, b), f(a, b))) \end{array}$$

Termes-Substitucions (ii)

Definition

La **composició** de substitucions σ i τ és la substitució $\sigma \circ \tau$:

$$\sigma \circ \tau(t) = \sigma(\tau(t))$$

Una substitució σ és **més general** que τ: $\sigma \leq \tau$, si existeix una substitució ρ tal que $\tau = \rho \circ \sigma$.

Termes-Substitucions (ii)

Definition

La **composició** de substitucions σ i τ és la substitució $\sigma \circ \tau$:

$$\sigma \circ \tau(t) = \sigma(\tau(t))$$

Una substitució σ és **més general** que τ: $\sigma \leq \tau$, si existeix una substitució ρ tal que $\tau = \rho \circ \sigma$.

Example

Sigui $\sigma = [x \mapsto f(a, b), y \mapsto h(z), z \mapsto a]$ i $\rho = [z \mapsto c]$

$$\rho \circ \quad \sigma(\quad g(\quad z, \quad h(y), \qquad f(x, x) \qquad\qquad)) \quad =$$

Termes-Substitucions (ii)

Definition

La **composició** de substitucions σ i τ és la substitució $\sigma \circ \tau$:

$$\sigma \circ \tau(t) = \sigma(\tau(t))$$

Una substitució σ és **més general** que τ: $\sigma \leq \tau$, si existeix una substitució ρ tal que $\tau = \rho \circ \sigma$.

Example

Sigui $\sigma = [x \mapsto f(a, b), y \mapsto h(z), z \mapsto a]$ i $\rho = [z \mapsto c]$

$$\rho \circ \quad \sigma(\quad g(\quad z, \quad h(y), \qquad f(x, x) \qquad)) \quad =$$
$$\rho\Big(\quad \sigma(\quad g(\quad z, \quad h(y), \qquad f(x, x) \qquad)) \quad \Big) =$$

Termes-Substitucions (ii)

Definition

La **composició** de substitucions σ i τ és la substitució $\sigma \circ \tau$:

$$\sigma \circ \tau(t) = \sigma(\tau(t))$$

Una substitució σ és **més general** que τ: $\sigma \leq \tau$, si existeix una substitució ρ tal que $\tau = \rho \circ \sigma$.

Example

Sigui $\sigma = [x \mapsto f(a,b), y \mapsto h(z), z \mapsto a]$ i $\rho = [z \mapsto c]$

$$\begin{array}{ll}
\rho \circ \sigma(g(z, h(y), f(x,x))) & = \\
\rho\Big(\sigma(g(z, h(y), f(x,x)))\Big) & = \\
\rho\Big(g(a, h(h(z)), f(f(a,b), f(a,b)))\Big) & =
\end{array}$$

Termes-Substitucions (ii)

Definition

La **composició** de substitucions σ i τ és la substitució $\sigma \circ \tau$:

$$\sigma \circ \tau(t) = \sigma(\tau(t))$$

Una substitució σ és **més general** que τ: $\sigma \leq \tau$, si existeix una substitució ρ tal que $\tau = \rho \circ \sigma$.

Example

Sigui $\sigma = [x \mapsto f(a,b), y \mapsto h(z), z \mapsto a]$ i $\rho = [z \mapsto c]$

$$\begin{aligned}
&\rho \circ \sigma(g(z, h(y), f(x,x))) = \\
&\rho\big(\sigma(g(z, h(y), f(x,x)))\big) = \\
&\rho\big(g(a, h(h(z)), f(f(a,b), f(a,b)))\big) = \\
&g(a, h(h(c)), f(f(a,b), f(a,b)))
\end{aligned}$$

Termes-Substitucions (ii)

Definition

La **composició** de substitucions σ i τ és la substitució $\sigma \circ \tau$:

$$\sigma \circ \tau(t) = \sigma(\tau(t))$$

Una substitució σ és **més general** que τ: $\sigma \leq \tau$, si existeix una substitució ρ tal que $\tau = \rho \circ \sigma$.

Example

- $\sigma_1 = [x_1 \mapsto f(a, b), y_1 \mapsto h(z_1), z_1 \mapsto a]$
- $\sigma_2 = [x_1 \mapsto f(x_2, x_3), y_1 \mapsto y_2]$
- $\sigma_3 = [x_1 \mapsto f(y_3, y_3)]$

Com es relacionen???

Termes-Unificació (i)

Definition

- Una **equació** és un parell (no-orientat) de termes $s \stackrel{?}{=} t$.
- Un **problema d'unificació** és un conjunt d'equacions: $P = \{s_1 \stackrel{?}{=} t_1, \ldots, s_n \stackrel{?}{=} t_n\}$. És solucionable (**unificable**) si existeix alguna substitució σ (**unificador**) tal que $\forall i \in \{1..n\},\ \sigma(s_i) = \sigma(t_i)$ (**instància comú**).
- Un unificador és l'**unificador més general (mgu)** sii és més general que qualsevol altre unificador. (únic)

Termes-Unificació (ii)

Example

- No unificables:
  - $\{x \stackrel{?}{=} f(z,a), z \stackrel{?}{=} f(a,x)\}$
  - $\{f(x,x) \stackrel{?}{=} f(a,z), z \stackrel{?}{=} f(a,a)\}$

Termes-Unificació (ii)

Example

- No unificables:
  - $\{x \stackrel{?}{=} f(z,a), z \stackrel{?}{=} f(a,x)\}$
  - $\{f(x,x) \stackrel{?}{=} f(a,z), z \stackrel{?}{=} f(a,a)\}$
- Unificable: $\{f(a,x) \stackrel{?}{=} f(y_1,y_2), h(f(z,z)) \stackrel{?}{=} x\}$
  - un unificador:

$$\sigma = [y_1 \mapsto a, y_2 \mapsto h(f(b,b)), x \mapsto h(f(b,b)), z \mapsto b]$$

  - l'unificador més general:

$$\rho = [y_1 \mapsto a, y_2 \mapsto h(f(z,z)), x \mapsto h(f(z,z))$$

De fet, $\sigma = [z \mapsto b] \circ \rho$.

Termes-Unificació (iii)

Procediment d'unificació, (si unifica dóna el mgu):

1. $P \cup \{t \stackrel{?}{=} t\} \Longrightarrow P$
2. $P \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) \stackrel{?}{=} f(s_1, \ldots, s_n)\} \Longrightarrow P \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{t_i \stackrel{?}{=} s_i\}$
3. $P \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) \stackrel{?}{=} g(s_1, \ldots, s_n)\} \Longrightarrow$ **CLASH** $(f \neq g)$
4. $P \cup \{X \stackrel{?}{=} t\} \Longrightarrow \{X \mapsto t\}(P) \cup \{X \stackrel{?}{=} t\}$ si $X \in vars(P)$ i $X \notin vars(t)$. Si $t = Y$ i X o Y no apareixen a la resta del problema, no aplicarem la regla.
5. $P \cup \{X \stackrel{?}{=} t\} \Longrightarrow$ **OCCUR-CHECK** (si $X \in vars(t)$ i $X \neq t$)

El procés acaba quan produïm un OCCUR-CHECK o un CLASH, no unificables; o quan no es poden aplicar més regles i llavors l'unificador es pot obtenir del que ha quedat que naturalment tindrà la forma: $\{X_1 \stackrel{?}{=} t_1, \ldots, X_m \stackrel{?}{=} t_m\}$

Unificació (iv)

Unifiquem:

$$\{\underline{\mathrm{p}(f(X, g(X)), h(Y), V) \stackrel{?}{=} \mathrm{p}(Y, h(V), f(g(Z), W)))}\}$$

Unificació (iv)

Unifiquem:

$\{\underline{\mathrm{p}(f(X, g(X)), h(Y), V) \stackrel{?}{=} \mathrm{p}(Y, h(V), f(g(Z), W))}\}$

$\{\underline{f(X, g(X)) \stackrel{?}{=} Y}, h(Y) \stackrel{?}{=} h(V), V \stackrel{?}{=} f(g(Z), W)\}$

Unificació (iv)

Unifiquem:

$$\{\underline{\mathrm{p}(f(X,g(X)),h(Y),V) \stackrel{?}{=} \mathrm{p}(Y,h(V),f(g(Z),W)))}\}$$
$$\{\underline{f(X,g(X)) \stackrel{?}{=} Y}, h(Y) \stackrel{?}{=} h(V), V \stackrel{?}{=} f(g(Z),W)\}$$
$$\{Y \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), \underline{h(f(X,g(X))) \stackrel{?}{=} h(V)}, V \stackrel{?}{=} f(g(Z),W)\}$$

Unificació (iv)

Unifiquem:

$\{\underline{\mathrm{p}(f(X,g(X)),h(Y),V) \stackrel{?}{=} \mathrm{p}(Y,h(V),f(g(Z),W))}\}$

$\{\underline{f(X,g(X)) \stackrel{?}{=} Y}, h(Y) \stackrel{?}{=} h(V), V \stackrel{?}{=} f(g(Z),W)\}$

$\{Y \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), \underline{h(f(X,g(X))) \stackrel{?}{=} h(V)}, V \stackrel{?}{=} f(g(Z),W)\}$

$\{Y \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), \underline{f(X,g(X)) \stackrel{?}{=} V}, V \stackrel{?}{=} f(g(Z),W)\}$

Unificació (iv)

Unifiquem:

$$\{\underline{\mathrm{p}(f(X,g(X)),h(Y),V) \stackrel{?}{=} \mathrm{p}(Y,h(V),f(g(Z),W)))}\}$$
$$\{\underline{f(X,g(X)) \stackrel{?}{=} Y}, h(Y) \stackrel{?}{=} h(V), V \stackrel{?}{=} f(g(Z),W)\}$$
$$\{Y \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), \underline{h(f(X,g(X))) \stackrel{?}{=} h(V)}, V \stackrel{?}{=} f(g(Z),W)\}$$
$$\{Y \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), \underline{f(X,g(X)) \stackrel{?}{=} V}, V \stackrel{?}{=} f(g(Z),W)\}$$
$$\{Y \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), V \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), \underline{f(X,g(X)) \stackrel{?}{=} f(g(Z),W)}\}$$

Unificació (iv)

Unifiquem:

$$\{\underline{\mathrm{p}(f(X,g(X)),h(Y),V) \stackrel{?}{=} \mathrm{p}(Y,h(V),f(g(Z),W)))}\}$$
$$\{\underline{f(X,g(X)) \stackrel{?}{=} Y}, h(Y) \stackrel{?}{=} h(V), V \stackrel{?}{=} f(g(Z),W)\}$$
$$\{Y \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), \underline{h(f(X,g(X))) \stackrel{?}{=} h(V)}, V \stackrel{?}{=} f(g(Z),W)\}$$
$$\{Y \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), \underline{f(X,g(X)) \stackrel{?}{=} V}, V \stackrel{?}{=} f(g(Z),W)\}$$
$$\{Y \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), V \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), \underline{f(X,g(X)) \stackrel{?}{=} f(g(Z),W)}\}$$
$$\{Y \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), V \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), \underline{X \stackrel{?}{=} g(Z)}, g(X) \stackrel{?}{=} W\}$$

Unificació (iv)

Unifiquem:

$$\{\underline{\mathrm{p}(f(X,g(X)),h(Y),V) \stackrel{?}{=} \mathrm{p}(Y,h(V),f(g(Z),W)))}\}$$
$$\{\underline{f(X,g(X)) \stackrel{?}{=} Y}, h(Y) \stackrel{?}{=} h(V), V \stackrel{?}{=} f(g(Z),W)\}$$
$$\{Y \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), \underline{h(f(X,g(X))) \stackrel{?}{=} h(V)}, V \stackrel{?}{=} f(g(Z),W)\}$$
$$\{Y \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), \underline{f(X,g(X)) \stackrel{?}{=} V}, V \stackrel{?}{=} f(g(Z),W)\}$$
$$\{Y \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), V \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), \underline{f(X,g(X)) \stackrel{?}{=} f(g(Z),W)}\}$$
$$\{Y \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), V \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), \underline{X \stackrel{?}{=} g(Z)}, g(X) \stackrel{?}{=} W\}$$
$$\{Y \stackrel{?}{=} f(g(Z),g(g(Z))), V \stackrel{?}{=} f(g(Z),g(g(Z))), X \stackrel{?}{=} g(Z), \underline{g(g(Z)) \stackrel{?}{=} W}\}$$

Unificació (iv)

Unifiquem:

$$\{\underline{\mathrm{p}(f(X,g(X)),h(Y),V) \stackrel{?}{=} \mathrm{p}(Y,h(V),f(g(Z),W))}\}$$
$$\{\underline{f(X,g(X)) \stackrel{?}{=} Y}, h(Y) \stackrel{?}{=} h(V), V \stackrel{?}{=} f(g(Z),W)\}$$
$$\{Y \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), \underline{h(f(X,g(X))) \stackrel{?}{=} h(V)}, V \stackrel{?}{=} f(g(Z),W)\}$$
$$\{Y \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), \underline{f(X,g(X)) \stackrel{?}{=} V}, V \stackrel{?}{=} f(g(Z),W)\}$$
$$\{Y \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), V \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), \underline{f(X,g(X)) \stackrel{?}{=} f(g(Z),W)}\}$$
$$\{Y \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), V \stackrel{?}{=} f(X,g(X)), \underline{X \stackrel{?}{=} g(Z)}, g(X) \stackrel{?}{=} W\}$$
$$\{Y \stackrel{?}{=} f(g(Z),g(g(Z))), V \stackrel{?}{=} f(g(Z),g(g(Z))), X \stackrel{?}{=} g(Z), \underline{g(g(Z)) \stackrel{?}{=} W}\}$$
$$\{Y \stackrel{?}{=} f(g(Z),g(g(Z))), V \stackrel{?}{=} f(g(Z),g(g(Z))), X \stackrel{?}{=} g(Z), W \stackrel{?}{=} g(g(Z))\}$$

Termes-Unificació (iv)

Exercicis:

7. Resol les següents equacions:
   - $$h(x, h(x, f(y))) \stackrel{?}{=} h(h(g(y), y), z)$$
   - $$h(h(g(x), f(y)), f(z)) \stackrel{?}{=} h(h(g(z), f(f(x))), f(y))$$
8. Demostra que la "instància comú" mínima d'un problema d'unificació pot tenir tamany exponencial. (dóna una equació amb solució exponencial)
9. Quina és la complexitat de l'algorisme d'unificació que us hem donat?

Termes-Unificació (v)

Problema obert:

Si a les equacions, a part de variables de termes, permetem variables de contextes, que denotin contextes, estem davant del **problema d'unificació de contextes**.
Existeix algun algorisme per a decidir unificabilitat de qualsevol equació?

$$F(f(a,b)) \stackrel{?}{=} f(F(a),b)$$

Termes-Unificació (vi)

Definition

- Un **problema de matching** és un conjunt d'equacions: $P = \{s_1 \stackrel{?}{=} t_1, \ldots, s_n \stackrel{?}{=} t_n\}$.
- És solucionable si existeix alguna substitució σ (**unificador**) tal que $\forall i \in \{1..n\},\ \sigma(s_i) = t_i$.
- El matching també es defineix de vegades com a un problema d'unificació on "cada equació te un costat ground".
- Tant el problema de la unificació com del matching tenen complexitat lineal però, naturalment, el matching és molt més fàcil d'implementar.

Procediment de matching:

1. $P \cup \{t \stackrel{?}{=} t\} \Longrightarrow P$
2. $P \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) \stackrel{?}{=} f(s_1, \ldots, s_n)\} \Longrightarrow P \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{t_i \stackrel{?}{=} s_i\}$
3. $P \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) \stackrel{?}{=} g(s_1, \ldots, s_n)\} \Longrightarrow$ **FAIL** $(f \neq g)$
4. $P \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) \stackrel{?}{=} x\} \Longrightarrow$ **FAIL**
5. $P \cup \{x \stackrel{?}{=} t_1\} \Longrightarrow$ **FAIL** si $x \stackrel{?}{=} t_2 \in P$ i tenim $t_1 \neq t_2$

El procés acaba quan produïm una fallada, no “matchables”; o quan no es poden aplicar més regles i llavors l’unificador es pot obtenir del que ha quedat que naturalment tindrà la forma: $\{X_1 \stackrel{?}{=} t_1, \ldots, X_m \stackrel{?}{=} t_m\}$

Term Rewriting Systems (TRS) (i)

Example

Un conjunt de regles de reescriptura:

$$\begin{array}{llcl} r_1 : & f(a,x) & \rightarrow & g(x,x) \\ r_2 : & b & \rightarrow & f(b,b) \end{array}$$

Term Rewriting Systems (TRS) (i)

Example

Un conjunt de regles de reescriptura:

$$\begin{array}{rlcl} r_1: & f(a,x) & \rightarrow & g(x,x) \\ r_2: & b & \rightarrow & f(b,b) \end{array}$$

ens permet reescriure el terme $g(f(a,b), f(a,b))$:

$$g(f(a,b), f(a,b)) \rightarrow g(g(b,b), f(a,b))$$

Term Rewriting Systems (TRS) (i)

Example

Un conjunt de regles de reescriptura:

$$\begin{array}{llcl} r_1: & f(a,x) & \rightarrow & g(x,x) \\ r_2: & b & \rightarrow & f(b,b) \end{array}$$

ens permet reescriure el terme $g(f(a,b),f(a,b))$:

$$g(f(a,b),f(a,b)) \rightarrow g(g(b,b),f(a,b))$$

utilitzant la regla r_1 amb la substitució $\{x \mapsto b\}$ en el subterme $\langle f(a,b) \mid g(\bullet, f(a,b))\rangle$. (fem matching!)

Term Rewriting Systems (TRS) (ii)

Definition

- Una **regla de reescriptura** és un parell de termes l, r que representarem $l \rightarrow r$.
  - l no pot ser una variable
  - $Var(r) \subseteq Var(l)$

Term Rewriting Systems (TRS) (ii)

Definition

- Una **regla de reescriptura** és un parell de termes l, r que representarem $l \to r$.
  - l no pot ser una variable
  - $Var(r) \subseteq Var(l)$
- Un **sistema de reescriptura de termes (TRS)** és un parell (signatura, conjunt de regles de reescriptura): $\mathcal{R} = (\Sigma, R)$

Term Rewriting Systems (TRS) (ii)

Definition

- Una **regla de reescriptura** és un parell de termes l, r que representarem $l \to r$.
  - l no pot ser una variable
  - $Var(r) \subseteq Var(l)$
- Un **sistema de reescriptura de termes (TRS)** és un parell (signatura, conjunt de regles de reescriptura): $\mathcal{R} = (\Sigma, R)$
- Un **pas de reescriptura** d'una regla $r_1 : \; l \to r$ en un terme t consisteix en *reduir* una ocurrència de $\sigma(l)$ (**redex**) en un determinat contexte $C[\,]$ de t, tal com segueix:

$$t = C[\sigma(l)] \to_{r_1} C[\sigma(r)]$$

Term Rewriting Systems (TRS) (iii)

- Identificarem $\mathcal{R} = \{\Sigma, R\}$ amb l'ARS $(T(\Sigma), \rightarrow)$ on $\rightarrow = \cup\{\rightarrow_\rho \in R\}$.
- S'hereden tots els conceptes dels ARS: CR, C, SN, T,...
- Tipus de regles (generalitzable a TRS):
  - una regla és **left(/right)-linear** si el terme esquerra(/dret) és lineal
  - una regla és **non-duplicating** si cap variable occorre més cops a la dreta que a l'esquerra
  - una regla és **non-erasing** si tota variable de l'esquerra ocorre a la dreta
  - una regla és **collapsing** si el terme dret és una variable

Sistemes equacionals (i)

Un conjunt d'equacions ens permet especificar tipus de dades: naturals amb suma i producte:

$$
\begin{array}{llcl}
e_1: & suma(x, 0) & = & x \\
e_2: & suma(x, s(y)) & = & s(suma(x, y)) \\
e_3: & per(x, 0) & = & 0 \\
e_4: & per(x, s(y)) & = & suma(per(x, y), x)
\end{array}
$$

Sistemes equacionals (i)

Un conjunt d'equacions ens permet especificar tipus de dades: naturals amb suma i producte:

$$
\begin{array}{lllll}
e_1: & suma(x, 0) & \rightarrow & x \\
e_2: & suma(x, s(y)) & \rightarrow & s(suma(x, y)) \\
e_3: & per(x, 0) & \rightarrow & 0 \\
e_4: & per(x, s(y)) & \rightarrow & suma(per(x, y), x)
\end{array}
$$

Típicament per resoldre el *word problem*: *donada una teoria i dos termes decidir si aquests són iguals segons la teoria*, interessa traduir equacions a regles de reescriptura, obtenint un sistema convergent, però com?
Què passa amb:?

$$suma(x, y) = suma(y, x)$$

Sistemes equacionals (ii)

Definition

- Un **sistema equacional** és un parell $\mathcal{E} : (\Sigma, E)$ on E és un conjunt d'equacions $s = t$ on $s, t \in T(\Sigma)$.
- Donat $\mathcal{E} : (\Sigma, E)$, denotem $\mathcal{E}^{\leftrightarrow}$ el pseudo-TRS $(\Sigma, E^{\leftrightarrow})$ on $E^{\leftrightarrow} = \{s \to t \mid s = t \in E \vee t = s \in E\}$.
- Una reducció a $(\Sigma, E^{\leftrightarrow})$ és una **conversió**. Escriurem $s =_E t$ si existeix una conversió de s a t amb $E^{\leftrightarrow}$.

Sistemes equacionals (ii)

Definition

- Un **sistema equacional** és un parell $\mathcal{E} : (\Sigma, E)$ on E és un conjunt d'equacions $s = t$ on $s, t \in T(\Sigma)$.
- Donat $\mathcal{E} : (\Sigma, E)$, denotem $\mathcal{E}^{\leftrightarrow}$ el pseudo-TRS $(\Sigma, E^{\leftrightarrow})$ on $E^{\leftrightarrow} = \{s \to t \mid s = t \in E \vee t = s \in E\}$.
- Una reducció a $(\Sigma, E^{\leftrightarrow})$ és una **conversió**. Escriurem $s =_E t$ si existeix una conversió de s a t amb $E^{\leftrightarrow}$.

El més important és que la reescriptura respecti el significat (**soundness**).

Theorem

Sigui $\mathcal{A} \models E$, llavors $t =_E s \Rightarrow \mathcal{A} \models t = s$.

P. ex.: interpretem la teoria dels nats, la suma i el producte, la reescriptura transforma iguals per iguals en els naturals.

Sistemes equacionals (iii)

Per a resoldre el word problem d'un sistema equacional E volem un TRS R complet: strongly-normalizing (de terminació) i Church-rosser de manera que:

$$t =_R s \Leftrightarrow t =_E s$$

L'algorisme és: trobar $t\downarrow$ i $s\downarrow$ i mirar si són iguals.

Sistemes equacionals (iii)

Per a resoldre el word problem d'un sistema equacional E volem un TRS R complet: strongly-normalizing (de terminació) i Church-rosser de manera que:

$$t =_R s \Leftrightarrow t =_E s$$

L'algorisme és: trobar $t \downarrow$ i $s \downarrow$ i mirar si són iguals.

Compte!

Què passa quan els TRS no són complets?

Sistemes equacionals (iv)

Especificació equacional dels booleans:

$$
\begin{array}{llcl}
e_1: & \neg(\mathit{true}) & = & \mathit{false} \\
e_2: & \neg(\neg(x)) & = & x \\
e_3: & \mathit{and}(\mathit{true}, x) & = & x \\
e_4: & \mathit{and}(\mathit{false}, x) & = & \mathit{false} \\
e_5: & \mathit{or}(x, y) & = & \neg(\mathit{and}(\neg(x), \neg(y)))
\end{array}
$$

Sistemes equacionals (iv)

En construim un TRS que és strongly-normalizing però...

$$
\begin{array}{llcl}
r_1: & \neg(true) & \longrightarrow & false \\
r_2: & \neg(\neg(x)) & \longrightarrow & x \\
r_3: & and(true, x) & \longrightarrow & x \\
r_4: & and(false, x) & \longrightarrow & false \\
r_5: & or(x, y) & \longrightarrow & \neg(and(\neg(x), \neg(y)))
\end{array}
$$

Sistemes equacionals (iv)

En construim un TRS que és strongly-normalizing però...

$$
\begin{array}{llcl}
r_1: & \neg(true) & \rightarrow & false \\
r_2: & \neg(\neg(x)) & \rightarrow & x \\
r_3: & and(true, x) & \rightarrow & x \\
r_4: & and(false, x) & \rightarrow & false \\
r_5: & or(x, y) & \rightarrow & \neg(and(\neg(x), \neg(y)))
\end{array}
$$

no és Church-Rosser...

$$
\neg(false) \quad \leftarrow_{r_1} \quad \neg(\neg(true)) \quad \rightarrow_{r_2} \quad true
$$

Direm que $\neg(false)$ i *true* són **critical pairs**...

Sistemes equacionals (iv)

Usant Critical pairs podem completar el TRS:

$$
\begin{array}{llcl}
r_1: & \neg(true) & \longrightarrow & false \\
r_2: & \neg(\neg(x)) & \longrightarrow & x \\
r_3: & and(true, x) & \longrightarrow & x \\
r_4: & and(false, x) & \longrightarrow & false \\
r_5: & or(x, y) & \longrightarrow & \neg(and(\neg(x), \neg(y))) \\
r_6: & \neg(false) & \longrightarrow & true
\end{array}
$$