

Problemas de exámenes de Estructuras algebraicas

1. Consideremos las operaciones:

$$x * y = x^2 + y^2 \quad \text{sobre } \mathbf{R} \quad \text{y} \quad x * y = x + y + xy \quad \text{sobre } \mathbf{Q} - \{-1\}$$

a) estudiar las estructuras $(\mathbf{R}, *)$ y $(\mathbf{Q} - \{-1\}, *)$.

b) resolver la ecuación $3*(x*x) = (2*x) = 170$ en $(\mathbf{R}, *)$ y $(\mathbf{Q} - \{-1\}, *)$.

2. Sea (G, \circ) un grupo y c un elemento cualquiera de G . Demostrar que el $\{x \in G \mid x \circ c = c \circ x\}$ es un subgrupo de (G, \circ)

3. Sea (G, \cdot) el grupo generado por los elementos a y b tales que $a^2 = b^3 = e$ y $a \cdot b = b^2 \cdot a$

a) Demostrar que $a \cdot b^2 = b \cdot a$ y de esto deducir que G está formado por los elementos $e, a, b, b^2, a \cdot b$ y $b \cdot a$.

b) Formar la tabla de operación del grupo.

c) Determinar todos los subgrupos.

4. Sea $(\{a, b, c, d, p, q\}, \cdot)$ un grupo.

a) Completar su tabla razonando el procedimiento seguido.

.	a	b	c	d	p	q
a	d	c		a	q	
b			q		a	c
c	q		p		d	b
d						
p	b	q				a
q		p	a			

b) Encontrar todos sus subgrupos.

5. En el grupo conmutativo (G, \oplus) con elemento neutro e definimos la operación:

$$a \otimes b = a + b + e$$

- a) Demostrar si (G, \oplus, \otimes) es un anillo conmutativo con divisores de 0.
 b) Si $G = \{e, a, b\}$ hacer las tablas de las operaciones \oplus y \otimes .

6. En \mathbf{Q} definimos la operación: $a \cdot b = a + b - \alpha ab$, siendo α un elemento fijo de \mathbf{Q} .

- a) Demostrar que la estructura (\mathbf{Q}, \cdot) cumple la propiedad asociativa y tiene elemento neutro.
 b) Comprobar que (\mathbf{Q}, \cdot) no es un grupo y determinar k para que $(\mathbf{Q} - \{k\}, \cdot)$ sea un grupo.
 c) Determinar β para que \cdot sea distributiva con respecto a la operación $a * b = a + b + \beta$,

7. Se consideran en \mathbf{Z} las operaciones: $x \circ y = x + y + 1$ y $x * y = x + y + xy$.

- a) Demostrar que $(\mathbf{Z}, \circ, *)$ es un anillo unitario.
 b) Averiguar si los conjuntos $\{3n+1 \mid n \in \mathbf{Z}\}$ y $\{3n-1 \mid n \in \mathbf{Z}\}$ son o no subanillos.

8. Dado $a \in \mathbf{Z}$ definimos para cualesquiera $x, y \in \mathbf{Z}$ la relación: $x R y$ si y sólo si $x - y = a$.

- a) Demostrar que R es de equivalencia y encontrar el conjunto cociente.
 b) Al conjunto cociente anterior, que notaremos por $\mathbf{Z}/(a)$ le definimos las dos operaciones siguientes:

$$\langle x \rangle + \langle y \rangle = \langle x + y \rangle \qquad \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle = \langle x \cdot y \rangle$$

Hacer las tablas de $(\mathbf{Z}/(7), +, \cdot)$ y $(\mathbf{Z}/(8), +, \cdot)$

c) Resolver las ecuaciones

$$\begin{aligned} \langle 4 \rangle \cdot X + \langle 3 \rangle &= \langle 7 \rangle \\ \langle 2 \rangle \cdot X - \langle 5 \rangle &= \langle 2 \rangle \\ \langle 37 \rangle \cdot X + \langle 94 \rangle &= \langle 27 \rangle \end{aligned}$$

9. En \mathbf{R}^2 definimos las operaciones:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) \qquad (a, b) \otimes (c, d) = (ac, ad + b)$$

- a) Demostrar que $(\mathbf{R}^2, \oplus, \otimes)$ es un anillo unitario conmutativo.
 b) Encontrar los elementos inversibles y los divisores de cero.

10. Si $A = \{a_1 + a_2\sqrt{2} + a_3\sqrt{3} \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{Q}\}$, demostrar que A es un subanillo de $(\mathbf{R}, +, \cdot)$.

11. Demostrar que para cualquier número natural n , es $x = 1$ una raíz del polinomio $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ y encontrar su multiplicidad. Factorizar este polinomio en $\mathbf{R}[x]$ y $\mathbf{C}[x]$ para el

caso $n = 3$.

12. En el álgebra de Boole $(\mathbf{P}(E), \cup, \cap)$ definir que son los mintérminos i los maxtérminos de 3 variables y expresar como suma de minterminos las expresiones:

- a) $(A \cap (B \cap C)') \cup (A' \cup B' \cup C)'$
 b) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A' \cap B)'$

y simplificarlas.

13. Sea $(A, +, \cdot)$ una álgebra de Boole. Definimos una nueva operación en A : $x \oplus y = (xy') + (x'y)$.

- a) Demostrar que (A, \oplus) es un grupo abeliano.
 b) Demostrar que (A, \oplus, \cdot) es un anillo conmutativo y unitario.
 c) En el caso particular de que $(A, +, \cdot) = (\mathbf{P}(\{1, 2\}), \cup, \cap)$ hacer la tabla de las operaciones de (A, \oplus, \cdot) .

14. Demostrar las siguientes propiedades válidas en las álgebras de Boole:

$$\begin{aligned} a+b = ab &\Rightarrow a = b \\ ab'+a'b = 0 &\Rightarrow a = b \\ ab = 0 &\Rightarrow ab'+a'b = a+b \end{aligned}$$

15. Expresar como producto de maxtérminos de 4 variables la función booleana:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_4 + x_1'x_4' + (x_2' + x_3)(x_1' + x_2 + x_3' + x_4)$$

16. Simplificar las funciones booleanas de 4 variables:

- a) $(a'b'+c)(b'+c')(a+b)(b+cd')$
 b) $(a'+b')c+b'c'+ab+b(c+d')$

17. En Ginebra se reúnen Rusia, E.E.U.U., Gran Bretaña y Francia para hablar del desarme. Conviene que solo se aceptarán las resoluciones aprobadas afirmativamente al menos por tres de los países participantes, o que sean aprobadas afirmativamente por Rusia y E.E.U.U.. Encontrar la fórmula más simple que dá el resultado de la votación por aprobar resoluciones.

18. La familia Boole pasa sus vacaciones en la playa. Esta familia está compuesta por el padre, la madre, un hijo y dos hijas. Al bañarse, la familia tiene las siguientes precauciones: como a la madre no le gusta demasiado el agua, solo se baña cuando hay algún hijo o alguna hija bañándose y no lo está haciendo el padre, o bien, cuando estando bañándose el padre se bañan las dos hijas. Encontrar

la expresión que indica cuando se baña la madre en forma normal conjuntiva y en forma normal disyuntiva. Simplificar las dos formulas anteriores.

19. Sea $(G, *)$ un grupo finito con 6 elementos $G = \{e, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, donde e es el neutro y de modo que $a_1 * a_1 = a_2$, $a_1 * a_2 = e$, $a_3 * a_3 = e$, $a_1 * a_3 = a_4$, $a_3 * a_2 = a_4$, $a_3 * a_1 = a_5$, $a_2 * a_3 = a_5$.

- Calcular la tabla del grupo
- Calcular todos los subgrupos

20. Dados 4 valores booleanos $a, b, c, d \in \{0, 1\}$ denotemos para $abcd$ el número que en base 2 se representa con los bits a, b, c, d . Dado el entero k sea f_k la función booleana de $\{0, 1\}^4$ en $\{0, 1\}$ que nos dice si un número es múltiplo de k o no, es decir, $f(a, b, c, d) = 1$ si $abcd$ es múltiplo de k y $f(a, b, c, d) = 0$ si $abcd$ no es múltiplo de k . Expresar f_4 , $f_3 + f_4$ y $f_3' \cdot f_4$ como suma de minterminos y simplificar las expresiones resultantes.

21. En \mathbf{Q} consideramos las operaciones $a \oplus b = a + b + (n)$ y $a \otimes b = ab - 2a - 2b + 6$ (siendo (n) un múltiplo de n).

- Demostrar que (\mathbf{Q}, \oplus) y (\mathbf{Q}, \otimes) son grupos conmutativos.
- Cuánto tiene que valer n para que $(\mathbf{Q}, \oplus, \otimes)$ sea un cuerpo.