Equació d'ones no lineal per a un sistema molla-massa, varietats invariants i EDO límit.

13 de Maig del 2004

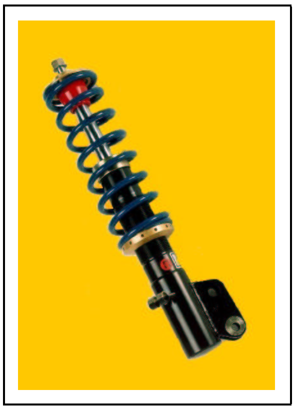
RESULTATS PREVIS: EL MODEL LINEAL

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \alpha\, u_{txx} = 0, \quad 0 < x < 1, \; t > 0 \\ \\ u(0,t) = 0 \\ \\ u_{tt}(1,t) = -\varepsilon \; [u_x(1,t) + \alpha\, u_{tx}(1,t) + r\, u_t(1,t)] \end{cases}$$

(Grobbelaar'94, Massat'83, ...)

$\alpha \geq 0$ (viscositat interna)
$\varepsilon \geq 0$ (invers massa externa)
$r > 0$ (viscositat externa)

Objectiu: comparació del model proposat amb el model clàssic (EDO de les oscil.lacions esmorteïdes) a partir del comportament asimptòtic de les solucions: *valors propis dominants*.



Entorn funcional

$X_2 = \{(u, \gamma) \in H^2(0,1) \times \mathbb{C},\ u(1) = \gamma,\ u(0) = 0\}$ com a subespai de $H^2(0,1) \times \mathbb{C}$;

$X_1 = \{(u, \gamma) \in H^1(0,1) \times \mathbb{C},\ u(1) = \gamma,\ u(0) = 0\}$ com a subespai de $H^1(0,1) \times \mathbb{C}$; i

$$X_0 = \{(u, \gamma) \in L^2(0,1) \times \mathbb{C}\} = L^2(0,1) \times \mathbb{C}$$

El model lineal es pot escriure com l'equació d'evolució:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}V - A_\varepsilon V = 0, & t \in (0, \infty) \\ \\ V(0) = F_0 \end{cases}$$

on

$$\mathcal{D}(A_\varepsilon) = \left\{ \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in X_1 \times X_1,\ (u + \alpha\, v) \in H^2(0,1) \right\} \subset \mathcal{H}$$

$$\mathcal{H} = X_1 \times X_0$$

Norma en $\mathcal{H}$:

$$\left\| \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, \beta) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}} = \int_0^1 |u_x|^2 dx + \int_0^1 |v|^2 dx + |\beta|^2$$

(equivalent a la norma habitual d'aquest espai producte).

Però si $\varepsilon > 0$ tenim definida una **família** de normes **equivalents** a l'anterior:

$$\left\| \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, \beta) \end{pmatrix} \right\|_{\varepsilon} = \int_0^1 |u_x|^2 dx + \int_0^1 |v|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} |\beta|^2$$

OBS: Serà important poder utilitzar una o altra norma, segons convingui.

Convergència generalitzada d'operadors
(generalització de la convergència en norma, Kato)

Siguin T_n, $n \in \mathbb{N}$, operadors tancats. Diem que **convergeix en sentit generalitzat** a T quan $n \to \infty$ si:

$$\widehat{\delta}(T_n, T) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

on $\widehat{\delta}$ mesura la distància entre les gràfiques.

$$\Downarrow$$

Tma (Semicontinuïtat superior de l'espectre, Kato) *Si T tancat amb $\sigma(T)$ separat en dues parts per una corba tancada Γ, i S és un altre operador tancat tal que $\widehat{\delta}(T, S)$ prou petit, aleshores $\sigma(S)$ està separat de la mateixa manera (subespais propis isomorfs, convergència en norma de les projeccions, ...)*

Resultats principals quan ε petit
(molla amb gran massa a l'extrem)

$A_\varepsilon,\ \varepsilon \geq 0$ és generador d'un semigrup analític (si $\alpha > 0$).

Cas $\varepsilon = 0$: $\lambda_0(0) = 0$ vap doble dominant i $\sigma_{ess} = \left\{\frac{-1}{\alpha}\right\}$.

Cas $\varepsilon > 0$ petit: pertorbació de $\varepsilon = 0$ ja que $A_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} A_0$ en sentit generalitzat (en norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, però també en $\|\cdot\|_\varepsilon$)

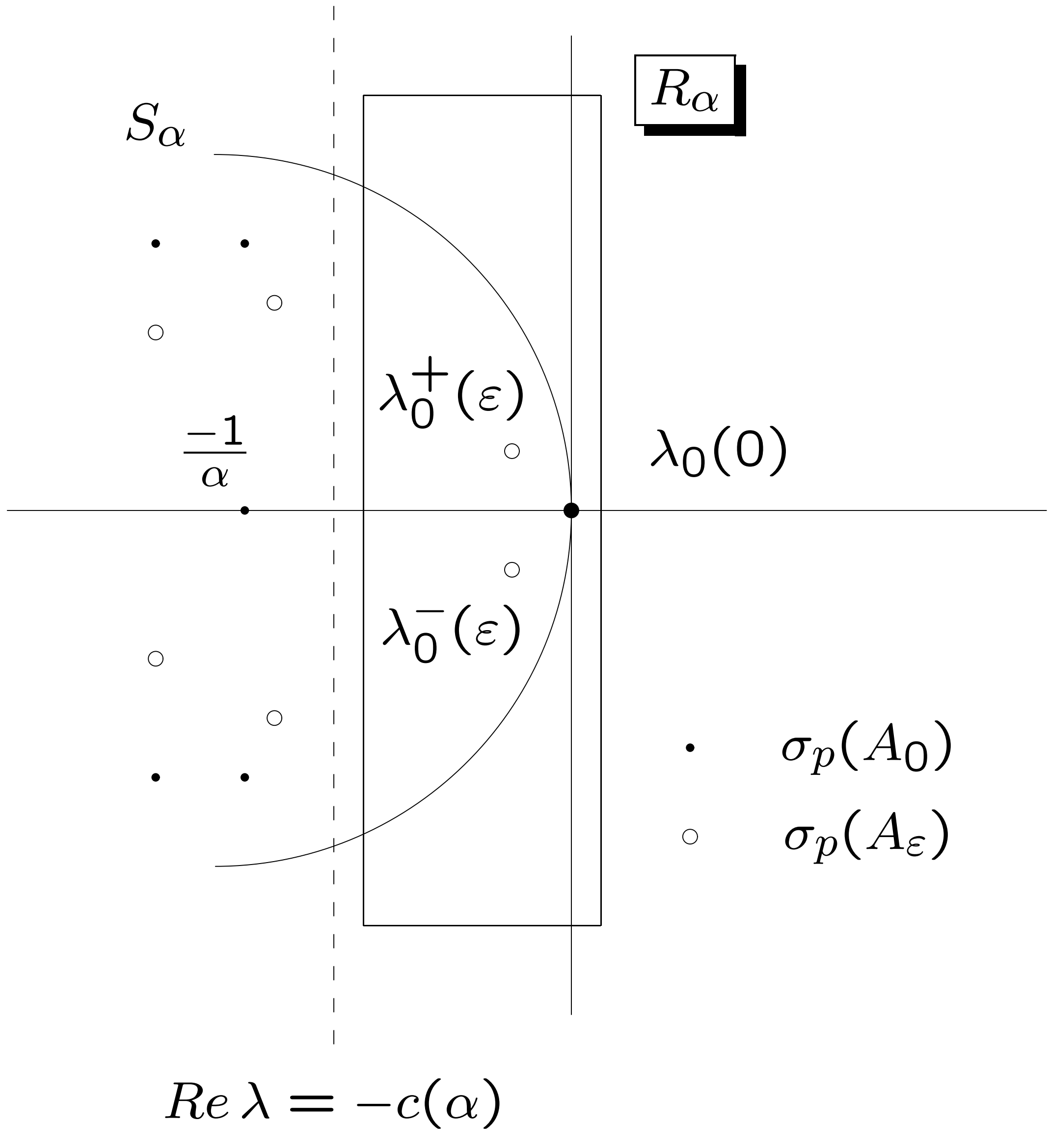
$$\Downarrow$$

Tma: Si $\varepsilon < \varepsilon_0$ l'operador admet $\left\{\lambda_0^+(\varepsilon), \lambda_0^-(\varepsilon)\right\}$ (pertorbacions de $\lambda(0) = 0$) com subconjunt finit de vaps dominants.

$$\Downarrow$$

Les solucions en $x = L$ de l'EDP poden aproximar-se, quan $t \to \infty$, per les solucions de l'EDO:

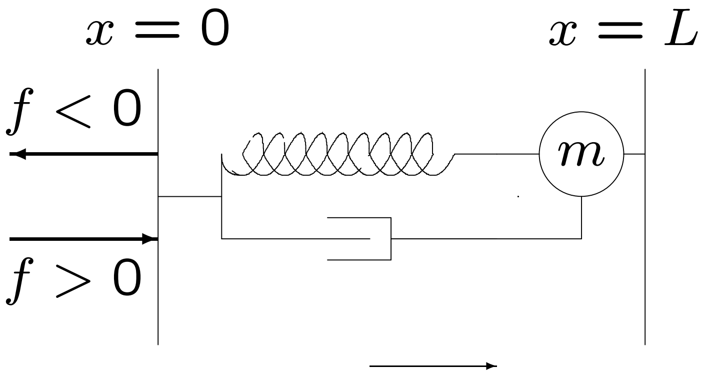
$$m\, w'' + k_1\, w' + k_0\, w = 0$$



R_α
S_α
$\lambda_0^+(\varepsilon)$
$\frac{-1}{\alpha}$
$\lambda_0(0)$
$\lambda_0^-(\varepsilon)$
$\sigma_p(A_0)$
$\sigma_p(A_\varepsilon)$
$Re\,\lambda = -c(\alpha)$

EL MODEL NO LINEAL

Motivació



(sentit positiu del moviment)

Imposem una acceleració en $x = 0$ (abans fixat) al sistema anterior:

$$u_{tt}(0) = \kappa\, f_\varepsilon(u(L,t)-u(0,t), u_t(L,t)-u_t(0,t))$$

amb $\kappa > 0$ un nou paràmetre fixat i

$$f_\varepsilon(z_1, z_2) := \varepsilon\, f\left(z_1, \frac{z_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

on $f(z_1, z_2)$ és Lipschitz, acotada i *prou regular*.

Nou sistema de referència on $x = 0$ fixat:

$$u(x,t) \to u(x,t) - u(0,t)$$

$$+$$

Canvi adimensional

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - \alpha\, u_{txx}(x,t) + \kappa\, \varepsilon f\left(u(1,t), \frac{u_t(1,t)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = 0 \\ \\ u(0,t) = 0 \\ \\ u_{tt}(1,t) = -\varepsilon\,[u_x + \alpha u_{tx} + r u_t]\,(1,t) - \kappa\, \varepsilon f\left(u(1,t), \frac{u_t(1,t)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \end{cases}$$

per $x \in (0,1)$, $t > 0$, i els paràmetres $\alpha > 0$, $\kappa > 0$ i $r > 0$ fixats, i $\varepsilon \geq 0$.

OBS: Si $f \equiv 0$ tenim el model lineal anterior.

OBJECTIU: Veure quan l'equació d'ones no lineal admet una EDO com a límit.

$$\Downarrow$$

varietats invariants

$$\Downarrow$$

quan $\varepsilon \to 0$ existeix una EDO límit que, amb un reescalat del temps, és:

$$\boxed{u'' + u + \kappa f(u, u') = 0}$$

Problema invers: f **control** extern en $x = 0$ per aconseguir **desplaçament-objectiu** (possible si és solució d'una EDO tipus l'EDO límit).

Exemple: controlar el sistema per aconseguir que el desplaçament tendeixi a ser periòdic no constant és trobar el control per tal que l'EDO límit sigui:

$$u'' + g(u)u' + u = 0 \quad (eq. Lienard)$$

$\Rightarrow$ *control:* $f(z_1, z_2) = g(z_1)z_2$.

Podem escriure l'EDP no lineal com una equació d'evolució:

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} - A_\varepsilon V = F_\varepsilon(V), & t > 0 \\ \\ V(0) = V_0 \end{cases}$$

on l'operador lineal:

$$A_\varepsilon V = \begin{pmatrix} (v, v(1)) \\ (\,(u + \alpha\, v)_{xx}, -\varepsilon\,(u + \alpha\, v)_x(1)\, -\, \varepsilon\, r\, v(1)\,) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}(A_\varepsilon) = \left\{ \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in X_1 \times X_1,\, (u + \alpha\, v) \in H^2(0,1) \right\}$$

$$\mathcal{D}(A_\varepsilon)\, \subset \mathcal{H} = X_1 \times X_0$$

i la no linealitat F_ε no depèn en aquest cas de t i està definida en tot $\mathcal{H}$ de la manera següent:

$$F_\varepsilon \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,0) \\ \left(-\kappa\, \varepsilon f(u(1), \frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}}), -\kappa\, \varepsilon f(u(1), \frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}}) \right) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ tenim **existència i unicitat de solució**.

Existència d'una varietat invariant exponencialment atractora

$T : \mathcal{D}(T) \subset X \to X$ sectorial, $Re\, \sigma(T) < 0$;
$B : \mathcal{D}(B) \subset Y \to Y$ generador d'un $\mathcal{C}^0$-grup d'op. lineals continus.
$h : X^\alpha \times Y^\alpha \to X$, $g : X^\alpha \times Y^\alpha \to Y^\alpha$ cont. loc. Lips.

⋆ $S \subset X^\alpha \times Y^\alpha$ és una *varietat invariant* de

$$\begin{cases} \dot{x} = Tx + h(x, y) \\ \dot{y} = By + g(x, y) \end{cases}$$

si existeix $\sigma : Y \to X^\alpha$ tal que

$$S = \{(x, y) \in X^\alpha \times Y^\alpha : x = \sigma(y)\}$$

i $\forall\, (x_0, y_0) \in S$ existeix $(x(\cdot), y(\cdot))$ solució tq:

$$x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \text{ i } (x(t), y(t)) \in S \ \forall t \in \mathbb{R}$$

⋆ S és *exponencialment atractora* si $\exists \gamma, K \geq 0$ tq:

$$\|x(t) - \sigma(y(t))\|_{X^\alpha} \leq K e^{-\gamma t} \|x(0) - \sigma(y(0))\|_{X^\alpha}$$

per a tota solució $(x(t), y(t))$.

Tma (existència de varietats invariants límit)

D.Henry'81

Carvalho'95; Carvalho, Lozada-Cruz'01; Carbone'03...

Considerem el sistema dèbilment acoblat:

$$\begin{cases} \dot{x} = T_\varepsilon\, x + h_\varepsilon(x,y) \\ \dot{y} = B_\varepsilon\, y + g_\varepsilon(x,y) \end{cases}$$

on:

X_ε, Y_ε, T_ε i B_ε com abans i $h_\varepsilon : X_\varepsilon^\alpha \times Y_\varepsilon^\alpha \to X_\varepsilon$ i $g_\varepsilon : X_\varepsilon^\alpha \times Y_\varepsilon^\alpha \to Y_\varepsilon$ satisfan:

(H1 -H4) h_ε i g_ε són Lipschitz i acotades (uniformement en ε);

(H5) $\| e^{T_\varepsilon t} w\|_{X_\varepsilon^\alpha} \leq M_T\, e^{-\beta(\varepsilon)t}\|w\|_{X_\varepsilon^\alpha}$, $t \geq 0$

(H6) $\| e^{T_\varepsilon t} w\|_{X_\varepsilon^\alpha} \leq M_T\, t^{-\alpha} e^{-\beta(\varepsilon)t}\|w\|_{X_\varepsilon}$, $t > 0$

(H7) $\| e^{B_\varepsilon t} z\|_{Y_\varepsilon^\alpha} \leq M_B\, e^{-\rho(\varepsilon)t}\|z\|_{Y_\varepsilon^\alpha}$, $t \leq 0$

(H8) $\| e^{B_\varepsilon t} z\|_{Y_\varepsilon^\alpha} \leq M_B\, t^{-\alpha} e^{\rho(\varepsilon)t}\|z\|_{Y_\varepsilon}$, $t > 0$

Si $\beta(\varepsilon) - \rho(\varepsilon) \to \infty$ quan $\varepsilon \to 0$ i ε petit, llavors:

$$\exists S_\varepsilon = \{(x, y) : x = \sigma_\varepsilon(y),\ y \in Y_\varepsilon^\alpha\}$$

varietat invariant exponencialment atractora on $\sigma_\varepsilon : Y_\varepsilon^\alpha \to X_\varepsilon^\alpha$ satisfà

(i) $s(\varepsilon) = \sup\limits_{y \in Y_\varepsilon^\alpha} \|\sigma_\varepsilon(y)\|_{X_\varepsilon^\alpha} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

(ii) $\|\sigma_\varepsilon(y) - \sigma_\varepsilon(z)\|_{X_\varepsilon^\alpha} \leq l(\varepsilon)\|y - z\|_{Y_\varepsilon^\alpha}$ i $l(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

Si h_ε i g_ε són prou regulars aleshores també ho és σ_ε i la seva derivada $D\sigma_\varepsilon$ satisfà:

$$\sup_{y \in Y_\varepsilon^\alpha} \|D\sigma_\varepsilon(y)\|_{L(Y_\varepsilon^\alpha, X_\varepsilon^\alpha)} \leq l(\varepsilon)$$

És a dir:
si hipòtesis 1 a 8 $\Rightarrow \exists\, \sigma_\varepsilon$ var. inv. exp. atract. que tendeix a zero en la topologia $\mathcal{C}^1$.

$$\Downarrow$$

Idea del teorema:

si l'espectre està *suficientment separat* en dues parts ($\beta(\varepsilon) - \rho(\varepsilon) \to \infty$), es pot enviar tot al $-\infty$ excepte un nombre finit de valors propis, que ens donaran la dinàmica del sistema quan $t \to \infty$:

$$\dot{y} = B_\varepsilon y + g_\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y), y)$$

(equació límit, en Y_ε)

Novetat del teorema:

$$\|\sigma_\varepsilon\| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathcal{C}^1} 0$$

Permetrà trobar l'EDO límit explícitament.

Pla de treball:

reescalem el temps $\Rightarrow$ separació de l'espectre

$\Downarrow$

Escrivim l'equació reescalada com un sistema, que complirà les hipòtesis del teorema en la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$

$\Downarrow$

Si ε prou petit, existeix σ_ε v.i.e.a. que va a 0 en topologia $\mathcal{C}^1$, $\|\cdot\|_\varepsilon$, quan $\varepsilon \to 0$

$\Downarrow$

Conseqüències del teorema

$\Downarrow$

EDO límit explícitament

Reescalem el temps:

$$t \longrightarrow t\sqrt{\varepsilon}$$

(acceleració del sistema quan $\varepsilon \longrightarrow 0$)

$$\frac{d}{dt}V - A_N V = F_N(V)$$

on

$$A_N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_\varepsilon$$

$$F_N \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} = -\kappa\sqrt{\varepsilon} \begin{pmatrix} (0,0) \\ \left(f\left(u(1), \frac{v(1)}{\sqrt{\varepsilon}}\right), f\left(u(1), \frac{v(1)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right) \end{pmatrix}$$

OBS: $\lambda \in \sigma(A_\varepsilon) \Leftrightarrow \mu = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}} \in \sigma(A_N)$

(però els subespais propis són els mateixos que per A_ε).

Separació de l'espectre:

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}A_\varepsilon\right) = \sigma_1^\varepsilon \cup \sigma_2^\varepsilon$$

on

$$\sigma_2^\varepsilon = \{\mu_0^+(\varepsilon), \mu_0^-(\varepsilon)\} = \left\{\frac{\lambda_0^+(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{\lambda_0^-(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\right\} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \{\pm i\}$$

$$\sigma_1^\varepsilon = \sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}A_\varepsilon\right) \setminus \sigma_2^\varepsilon \Rightarrow Re\ (\sigma_1^\varepsilon) < \frac{-c(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\infty$$

$\Rightarrow$ Descomposició de $\mathcal{H}$ i F_N (projeccions):

$$\mathcal{H} = H_1^\varepsilon \oplus H_2^\varepsilon \quad (\dim H_2^\varepsilon = 2)$$

$$h_\varepsilon(V) = P_1^\varepsilon(F_N(V))$$

$$g_\varepsilon(V) = P_2^\varepsilon(F_N(V))$$

Sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}V_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(A_\varepsilon|_{H_1^\varepsilon}\right)\right)V_1 + h_\varepsilon(V_1, V_2) \\ \\ \dfrac{d}{dt}V_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(A_\varepsilon|_{H_2^\varepsilon}\right)\right)V_2 + g_\varepsilon(V_1, V_2) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Tma ($\exists$ia v.i.e.a en norma $\|\cdot\|_\varepsilon$):

Si ε prou petit, existeix S_ε v.i.e.a. de dimensió 2:

$$S_\varepsilon = \{V = (V_1, V_2) : V_1 = \sigma_\varepsilon(V_2),\ V_2 \in H_2^\varepsilon\}$$

El flux sobre S_ε ve donat per

$$V(t) = V_2(t) + \sigma_\varepsilon(V_2(t))$$

on $V_2(t)$ és solució de:

$$\frac{d}{dt}V_2 = A_N(V_2) + P_2^\varepsilon\left[F_N(V_2 + \sigma_\varepsilon(V_2))\right], \quad V_2 \in H_2^\varepsilon$$

I, a més,

$$\sigma_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

en $\mathcal{C}^1(H_2^\varepsilon, H_1^\varepsilon; \|\cdot\|_\varepsilon)$.

Comprovació de les hipòtesis amb $\|\cdot\|_\varepsilon$

Lema (H1-H4): h_ε i g_ε són acotades i Lipschitz uniformement en ε si $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Dem: F_N acotat i Lipschitz en $\|\cdot\|_\varepsilon$

$$+$$

projeccions acotades quan les apliquem a elements del tipus $\begin{pmatrix} (0,0) \\ (a,a) \end{pmatrix}$

Lema (H7-H8): Es compleix que:

$$\|e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_\varepsilon|_{H_2^\varepsilon} t} V\|_\varepsilon \leq e^{\left(2\sqrt{2}+O(\sqrt{\varepsilon})\right)|t|}\|V\|_\varepsilon$$

per a tot $V \in \mathcal{H}_2^\varepsilon$ i per a tot $t \in \mathbb{R}$

(és a dir, $\rho(\varepsilon) = 2\sqrt{2} + O(\sqrt{\varepsilon})$)

Dem: Com que en $\mathcal{H}_2^\varepsilon$ tot és explícit, podem acotar

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_\varepsilon|_{H_2^\varepsilon}\right\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H};\,\varepsilon)} = \sup_{0\neq Y \in H_2^\varepsilon} \frac{\left\|\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}A_\varepsilon\right) Y\right\|^2_\varepsilon}{\|Y\|^2_\varepsilon}$$

usant desenvolupaments en ε dels termes que hi apareixen.

Comprovació de les hipòtesis amb $\|\cdot\|_\varepsilon$

Lema (H1-H4): h_ε i g_ε són acotades i Lipschitz uniformement en ε si $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Lema (H7-H8): Es compleix que:

$$\|e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_\varepsilon|_{H_2^\varepsilon}\, t} V\|_\varepsilon \leq e^{\left(2\sqrt{2}+O(\sqrt{\varepsilon})\right)\,|t|}\|V\|_\varepsilon$$

per a tot $V \in \mathcal{H}_2^\varepsilon$ i per a tot $t \in \mathbb{R}$

(és a dir, $\rho(\varepsilon) = 2\sqrt{2} + O(\sqrt{\varepsilon})$)

La hipòtesi 5

Obs: Com que exponent és zero, H5=H6 en el nostre cas.

Dificultats: volem

$$\left\| e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(A_\varepsilon|_{H_1^\varepsilon}\right)t} V \right\|_\varepsilon \le M e^{-\beta(\varepsilon)t} \|V\|_\varepsilon, \quad t > 0$$

amb M **independent** de ε. Però $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(A_\varepsilon|_{H_1^\varepsilon}\right)$ no és autoadjunt

Què farem? Essencialment, l'acotació del semigrup depèn del sector inclòs en la resolvent i de l'acotació de l'operador resolvent en aquest sector.

Per tant, buscarem un sector i una acotació per a les resolvents de $\left(A_\varepsilon|_{H_1^\varepsilon}\right)$ independents de ε (si ε prou petita).

Com? Usant que $A_\varepsilon \to A_0$ en sentit generalitzat (i, per tant, els subespais propis també s'assemblen) $\Rightarrow$ Podem *comparar* sectors i resolvents.

Lema (H5):

[...] Existeix $M \geq 1$ independent de ε tal que

$$\left\| e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(A_\varepsilon|_{H_1^\varepsilon}\right)t} V \right\|_\varepsilon \leq M\, e^{\frac{-c(\alpha)}{\sqrt[4]{\varepsilon}}t} \|V\|_\varepsilon \qquad si\ \varepsilon < \varepsilon_0$$

per a tot $V \in H_1^\varepsilon$, on $0 < c(\alpha) < min\{1/\alpha\,,\, \alpha\pi^2/2\}$

(és a dir, $\beta(\varepsilon) = c(\alpha)/\sqrt[4]{\varepsilon}$)

Dem tma:

Com que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\beta(\varepsilon) - \rho(\varepsilon)) =$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{c(\alpha)}{\sqrt[4]{\varepsilon}} - 2\sqrt{2} + O(\sqrt{\varepsilon}) \right) = +\infty$$

ja tenim demostrada l'existència de σ_ε, v.i.e.a. tal que:

$$\sigma_\varepsilon, D\sigma_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\|\cdot\|_\varepsilon} 0$$

$$\Downarrow$$

Si escrivim l'equació sobre la varietat invariant, tenim que V_2 és solució de:

$$\frac{d}{dt} V_2 = A_N (V_2) + P_2^\varepsilon \left[F_N (V_2 + \sigma_\varepsilon(V_2)) \right], \quad V_2 \in H_2^\varepsilon$$

$\star$ Obs important:

També és cert que $\exists \sigma_\varepsilon$ que tendeix a zero en $\mathcal{C}^1$ en norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$

$$\Downarrow$$

Per què cal que $\sigma_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ en $\mathcal{C}^1$ en norma $\|\cdot\|_\varepsilon$?

Perquè la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ no és suficient per veure que EDP $\rightarrow$ EDO en norma $\mathcal{C}^1$, a no ser que $f = f(u(1))$ (però no estabilitat estructural !)

Conseqüències del teorema

Primer, podem pensar

$$\sigma_\varepsilon = \sigma_\varepsilon(a,b) = \begin{pmatrix} (\sigma_\varepsilon^{11}(a,b) \ , \ \sigma_\varepsilon^{12}(a,b)) \\ (\sigma_\varepsilon^{21}(a,b) \ , \ \sigma_\varepsilon^{22}(a,b)) \end{pmatrix} \in H_1^\varepsilon \subset \mathcal{H}$$

Escrivim què significa que $\sigma_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ en norma $\mathcal{C}^1$, $\|\cdot\|_\varepsilon$ i tenim:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{a,b\in\mathbb{C}} \frac{|\sigma_\varepsilon^{22}(a,b)|}{\sqrt{\varepsilon}} = 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{a,b\in\mathbb{C}} |\sigma_\varepsilon^{12}(a,b)| = 0$$

I també

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{a,b\in\mathbb{C}} \left|(\partial_2\sigma_\varepsilon^{22})(a,b)\right| = 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{a,b\in\mathbb{C}} \sqrt{\varepsilon}\left|(\partial_2\sigma_\varepsilon^{12})(a,b)\right| = 0$$

Equació límit

Tma: L'equació sobre la v.i.e.a. de dimensió 2 convergeix quan $\varepsilon \to 0$ en la topologia $\mathcal{C}^1$ a:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u(1) \\ w(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(1) \\ -u(1) - \kappa f(u(1), w(1)) \end{pmatrix}$$

Si estructuralment estable $\Rightarrow$ fluxos topològicament equivalents si ε prou petit.

$$\Downarrow$$

Per tant, amb el temps reescalat les solucions de l'EDP no lineal inicial convergeixen a les solucions de l'EDO:

$$u''(1) + u(1) + \kappa f(u(1), u'(1)) = 0$$

Idea de la demostració:

Estem en H_2^ε, s.e. generat per $\lambda_0^\pm(\varepsilon)$.

Com que $A_\varepsilon \to A_0$ en sentit generalitzat, tenim que

$$\|P_2^\varepsilon - P_2^0\|_{\mathcal{H}} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

(les dues projeccions les tenim explícitament) i també que

$$H_2^\varepsilon \cong H_2^0 = \left\{ \begin{pmatrix} (x,1) \\ (0,0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (0,0) \\ (x,1) \end{pmatrix} \right\}$$

(aquest isomorfisme, $Q_\varepsilon = P_0^{-1}$, es troba explícitament)

$$\Downarrow$$

Escriurem l'equació sobre la var. inv. en les variables convenients i prendrem límits quan $\varepsilon \to 0$, usant l'anterior i les conseqüències que $\sigma_\varepsilon \to 0$ en $\mathcal{C}^1$, $\|\cdot\|_\varepsilon$.

Esquema var inv properes

Variables convenients: partim de $V_0 \in H_2^0$

$$V_0 = \begin{pmatrix} (u(1)x, u(1)) \\ (v(1)x, v(1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u(1)x, u(1)) \\ (\sqrt{\varepsilon} w(1)x, \sqrt{\varepsilon} w(1)) \end{pmatrix}$$

i després ho passem a H_2^ε

$$\Downarrow$$

Eq. sobre la var. inv. en aquestes variables:

$$\frac{d}{dt} V_0 = (P_0 A_N Q_\varepsilon) V_0 + P_0 P_2^\varepsilon \left[F_N \left(Q_\varepsilon V_0 + \sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0) \right) \right]$$

$$\Downarrow$$

Sumem i restem termes:

$$\frac{d}{dt} V_0 = (P_0 A_N Q_\varepsilon) V_0 +$$

$$P_0 P_2^\varepsilon \left[F_N \left(Q_\varepsilon V_0 + \sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0) \right) \right] - P_2^0 P_2^0 \left[F_N \left(Q_\varepsilon V_0 + \sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0) \right) \right] +$$

$$P_2^0 P_2^0 \left[F_N \left(Q_\varepsilon V_0 + \sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0) \right) \right] - P_2^0 F_N(V_0) +$$

$$+ P_2^0 F_N(V_0)$$

Els termes diferència tendeixen a zero en norma $\mathcal{C}^1$ i els altres ens donen el sistema límit enunciat, també en norma $\mathcal{C}^1$.

Per tant ...

EDP no lineal (amb temps reescalat)

$$\downarrow (\varepsilon \to 0)$$

$$u''(1) + u(1) + \kappa f(u(1), u'(1)) = 0$$

i fluxos equivalents si EDO és estructuralment estable i ε prou petit.