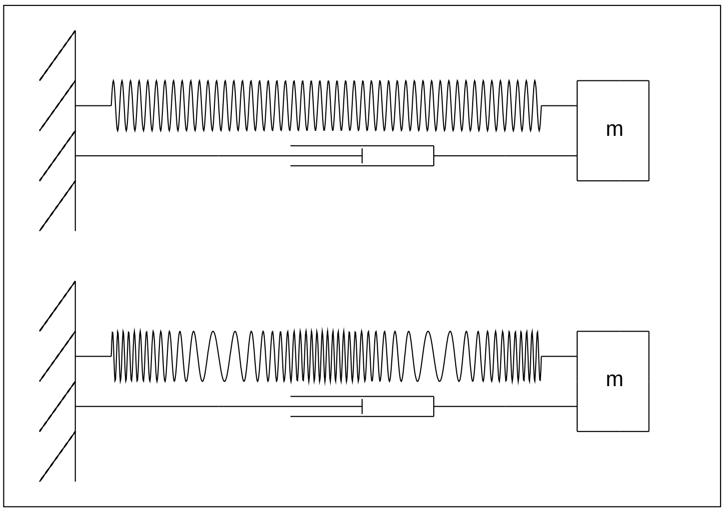
Anàlisi d'un model de suspensió-amortiment.

28 de Novembre del 2002

INTRODUCCIÓ.

Equació clàssica de la molla:

$$m\,u''(t) + r\,u'(t) + k\,u(t) = 0$$



Motivació: model clàssic de la molla en **EDO's** *vs*. model proposat en **EDP's**. Per què i quan les derivades parcials?

- model continu o discret: deformacions internes;

- consideració de la dissipació interna de la molla.

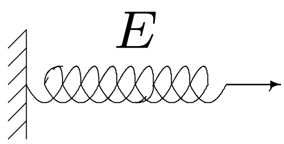
DESCRIPCIÓ DEL PROBLEMA: L'EXEMPLE DE L'AUTOMÒBIL.

DEDUCCIÓ DEL MODEL: MODELS REOLÒGICS (Davis).

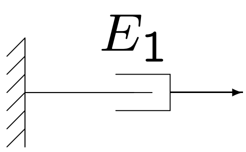
(També per balanç de moviments de teoria mecànica clàssica ...)

Models reològics: modelització de medis *viscoelàstics* mitjançant la combinació en *sèrie-paral.lel* de dues unitats simples:

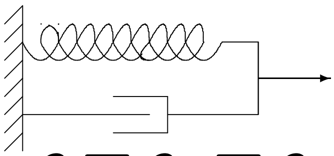
- *Spring* (elasticitat):



- *Dashpot* (viscositat):



1. MODEL DE KELVIN-VOIGT (*paral.lel*)



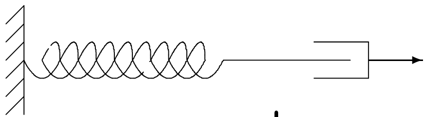
$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e = \varepsilon_v$$

Equació:

$$\sigma \; = \; E_1 \, \dot{\varepsilon} + E \, \varepsilon$$

2. MODEL DE MAXWELL (*sèrie*)



$$\sigma = \sigma_e = \sigma_v$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v$$

Equació:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{E_1}$$

3. EQUACIÓ D'ONES AMB DISSIPACIÓ FORTA (*o K-V continu*) I CONDICIONS DE CONTORN DINÀMIQUES: EL NOSTRE CAS.

Model:

$$\begin{cases} \rho\, u_{tt} = E_1\, u_{txx} + E\, u_{xx}, \quad 0 < x < L,\ t > 0 \\ \\ u(0,t) = 0 \\ \\ m\, u_{tt}(L,t) = -E\, u_x(L,t) - E_1\, u_{tx}(L,t) - q\, u_t(L,t) \end{cases}$$

on $u(x,t)$ és el *desplaçament*, ρ la *densitat* de la molla i $E =$ *elasticitat molla*, $E_1 =$ *viscositat molla*, $q =$ *viscositat amortidor*, $m =$ *massa* extrem.

ADIMENSIONALITZACIÓ DEL MODEL.

Canvi a *variables* adimensionals:

$$x \longleftrightarrow \frac{x}{L},\ t \longleftrightarrow \frac{t\sqrt{\frac{E}{\rho}}}{L}$$

Canvi a *funcions* adimensionals:

$$u \longleftrightarrow \frac{u}{L},\ (\Phi \longleftrightarrow \frac{\Phi}{E})$$

Canvi a *paràmetres* adimensionals:

$$\alpha = \frac{E_1}{\sqrt{E\rho}\,L},\ \varepsilon = \frac{\rho L}{m},\ r = \frac{q}{\sqrt{E\rho}}.$$

Model adimensional:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \alpha\, u_{txx} = 0, \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u_{tt}(1,t) = -\varepsilon\ \left[u_x(1,t) + \alpha\, u_{tx}(1,t) + r\, u_t(1,t)\right] \end{cases}$$

(Grobbelaar, Massat, Zuazua, Lopes, ...)

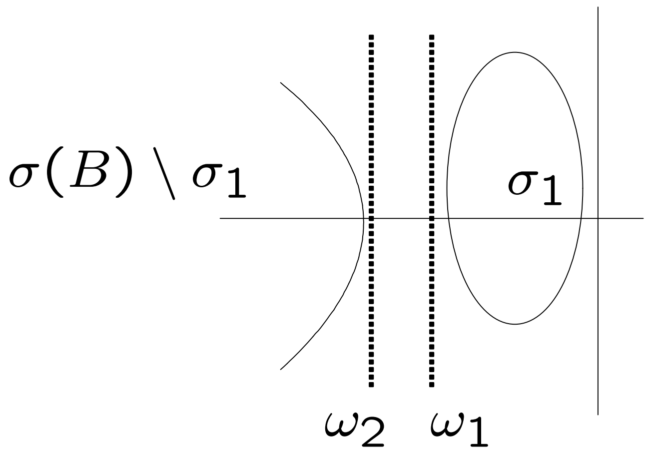
VALORS PROPIS DOMINANTS I REDUCCIÓ A EDO's.

Considerem l'equació d'evolució

$$\frac{d}{dt}\, x(t) = B\, x(t)$$

on B és un operador en un espai $\mathcal{X}$ de dimensió infinita amb espectre $\sigma(B)$.

Direm que B admet un subconjunt finit de valors propis dominants $\sigma_1 = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$ si:



Tenim una descomposició de l'espai, l'operador i les solucions associada a aquest descomposició de l'espectre.

Tma: Si B genera un semigrup analític i admet un subconjunt finit de valors propis dominants, les solucions de l'equació d'evolució compleixen:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\|x(t) - x_1(t)\|}{\|x(t)\|} = 0$$

En aquest cas, és raonable dir que l'equació d'evolució de dimensió infinita $x' = Bx$ té com a **límit** *quan $t \to \infty$ l'equació diferencial ordinària $x_1' = B_1 x_1$.*

ENTORN FUNCIONAL.

Volem escriure el model com una equació d'evolució, amb uns operadors i uns espais adequats. Ens cal definir abans, però, els següents espais:

$X_2 = \{(u, \gamma) \in H^2(0,1) \times \mathbb{C},\ u(1) = \gamma,\ u(0) = 0\}$

com a subespai de $H^2(0,1) \times \mathbb{C}$;

$X_1 = \{(u, \gamma) \in H^1(0,1) \times \mathbb{C},\ u(1) = \gamma,\ u(0) = 0\}$

com a subespai de $H^1(0,1) \times \mathbb{C}$; i

$$X_0 = \{(u, \gamma) \in L^2(0,1) \times \mathbb{C}\} = L^2(0,1) \times \mathbb{C}$$

Tenim definit un producte escalar de manera natural, equivalent al producte habitual dels espais on estan inclosos:

$$\langle (u, u(1)), (v, v(1)) \rangle_{X_1} = \int_0^1 u_x \, \overline{v_x} \, dx$$

i

$$\langle (u, \gamma), (v, \beta) \rangle_{X_0} = \int_0^1 u \, \overline{v} \, dx \ + \frac{1}{\varepsilon} \gamma \, \overline{\beta}$$

Denotem l'operador corresponent al nostre model per $(A_\alpha, \mathcal{D}(A_\alpha))$ i el definim de la manera següent:

$$\mathcal{D}(A_\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in X_1 \times X_1,\ (u + \alpha\, v) \in H^2(0,1) \right\} \subset \mathcal{H}$$

on $\mathcal{H} = X_1 \times X_0$ és l'espai de Hilbert total, amb el producte escalar

$$\left\langle \begin{pmatrix} (u_1, u_1(1)) \\ (u_0, \gamma_0)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (v_1, v_1(1)) \\ (v_0, \beta_0)) \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} =$$

$$= \Big\langle (u_1, u_1(1)), (v_1, v_1(1)) \Big\rangle_{X_1} + \Big\langle (u_0, \gamma_0), (v_0, \beta_0) \Big\rangle_{X_0}$$

Per $V = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A_\alpha)$ definim l'operador com:

$$A_\alpha V = \begin{pmatrix} (v, v(1)) \\ (\,(u + \alpha\, v)_{xx}, -\varepsilon\,(u + \alpha\, v)_x(1)\, -\, \varepsilon\, r\, v(1)\,) \end{pmatrix}$$

Si $V = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (u_t, u_t(1)) \end{pmatrix}$ i $V(0) = F_0 = \begin{pmatrix} (u_0(x), \eta) \\ (v_0(x), \mu) \end{pmatrix}$, el model equival a l'equació d'evolució:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} V = A_\alpha V, \;\; t \in (0, \infty) \\ V(0) = F_0 \end{cases}$$

Obs: Pel cas $\alpha = 0$ recuperem els resultats ($\mathcal{D}(A_0) = X_2 \times X_1 \;\subset \mathcal{H}$)

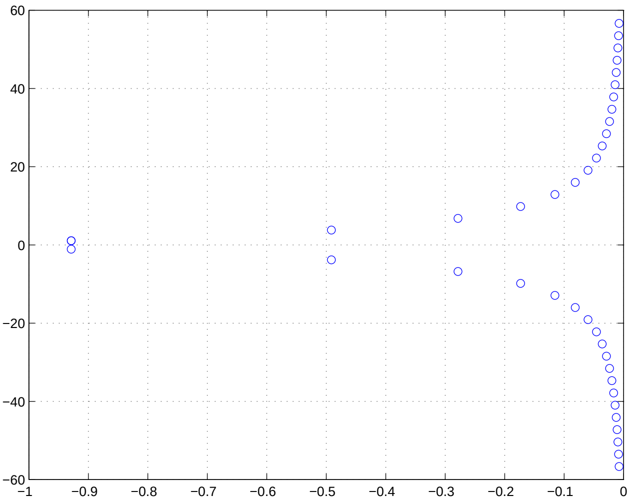
MOLLA ELÀSTICA PERFECTA:
$\alpha = 0$.

L'operador associat $(A, \mathcal{D}(A))$, amb $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$, genera un *semigrup continu de contraccions*.

RESULTATS PRINCIPALS:

- Les funcions pròpies de $(A, \mathcal{D}(A))$ són denses en $\mathcal{H}$. (*Gohberg i Krejn: pertorbacions compactes de iA*)

- $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ (no té espectre essencial). I $(A, \mathcal{D}(A))$ te infinits valors propis, tots amb $Re\lambda < 0$, i s'acumulen en $Re\lambda = 0$.



CONCLUSIONS:

- No existeix cap subconjunt finit de valors propis dominants:

$$EDP \nrightarrow EDO\,!!$$

- Totes les solucions *tendeixen a zero* quan $t \to \infty$. I existeixen solucions que hi tendeixen *tan lentament com vulguem* (ja que no tenim dissipació interna).

MOLLA VISCOELÀSTICA: $\alpha > 0$.

L'operador associat $(A_\alpha, \mathcal{D}(A_\alpha))$, amb $\mathcal{D}(A_\alpha) \subset \mathcal{H}$, genera un *semigrup analític*.

ESPECTRE DE A_α I VAPS DOMINANTS:

(pensarem A_α com a *pertorbació* de A_0)

Tma: A_α té **espectre essencial** $\left\{\dfrac{-1}{\alpha}\right\}$.
(Henry, Gohberg-Krejn)

I els valors propis?

Def (Kato): Direm que T_n **convergeix en sentit generalitzat** a T quan $n \to \infty$ si:

$$\hat{\delta}(T_n, T) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

on $\hat{\delta}(T_n, T)$ és, essencialment, la distància entre les gràfiques dels operadors corresponents.

$$\Downarrow$$

continuïtat de subconjunts finits de valors propis de T_n respecte els de T (dins una certa corba Γ).

Tma.de semicontinuïtat superior de l'espectre, Kato: Sigui T un operador tancat qualsevol amb l'espectre separat en dues parts $\sigma'(T)$ i $\sigma''(T)$ per una corba tancada Γ i sigui $\mathcal{H} = M'(T) \oplus M''(T)$ la descomposició associada de l'espai total $\mathcal{H}$. Aleshores existeix un $\delta > 0$ que dependrà de l'operador T i de la corba Γ amb les propietats següents:

i) Qualsevol operador S tal que $\hat{\delta}(S,T) < \delta$ té l'espectre separat per Γ també en dues parts $\sigma'(S)$ i $\sigma''(S)$, amb $\Gamma \subset \rho(S)$.

ii) En la descomposició de $\mathcal{H}$ associada a aquesta separació de l'espectre, $\mathcal{H} = M'(S) \oplus M''(S)$ es té que $M'(S)$ i $M''(S)$ són espais isomorfs a $M'(T)$ i $M''(T)$, respectivament. En particular, es mantenen les dimensions d'aquests espais.

iii) A més, aquesta descomposició és contínua en S, és a dir, que la projecció $P[S]$ de $\mathcal{H}$ tendeix a la projecció $P[T]$ si S convergeix a T en sentit generalitzat.

És a dir, si considerem un operador *prou proper* al que teníem, l'espectre es pot descompondre *de la mateixa manera*.

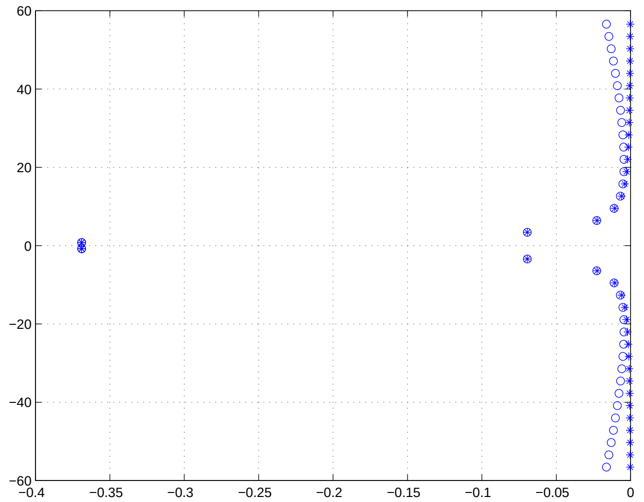
Aplicació en el nostre cas: Com que els valors propis són aïllats, podem trobar Γ que separi l'espectre de A_0 en $\sigma'(A_0) = \{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_s\}$ i $\sigma''(A_0) = \sigma(A_0) \setminus \sigma'(A_0)$

$$\Downarrow$$

dins la corba Γ l'operador pertorbat A_α té el mateix nombre de vaps (amb multiplicitat) que A_0 si $\alpha < \alpha_0$, que depèn de Γ i A_0.

Tma: Els valors propis de A_α convergeixen sobre compactes als valors propis de A_0 quan $\alpha \to 0$.

Dem: A_α convergeix en sentit generalitzat a A_0 quan $\alpha \to 0$, ja que $\|A_\alpha^{-1} - A_0^{-1}\| \to 0$ quan $\alpha \to 0$.



Obs: *No convergència global dels valors propis, ja que A_α és un operador sectorial.*

TMA: L'operador A_α, amb α proper a zero i $\varepsilon > 0$, admet un subconjunt finit de valors propis dominants.

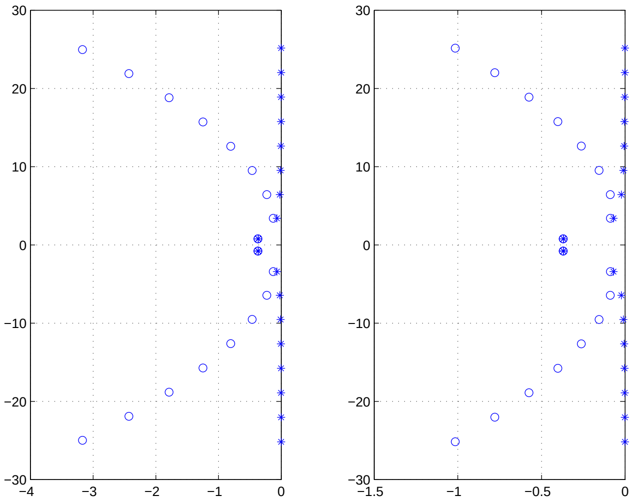
$$\Downarrow$$

$$EDP \rightarrow EDO\,?$$

Sí, però cada α és un cas particular ja que:

- *ordre de l'EDO ? ($\Leftrightarrow$ nombre de vaps dominants)*

- *vaps dominants pertorbació de quins vaps de A_0 ?*



EL SISTEMA QUAN ε ÉS PROPER A ZERO. (o m gran)

L'operador associat $(A_\alpha(\varepsilon), \mathcal{D}(A_\alpha))$, amb $\alpha > 0$ i $\varepsilon > 0$, és el mateix que el de $\alpha > 0$, però ara ens el mirem com a pertorbació respecte ε de $A_\alpha(0)$. En particular, també generarà un *semigrup analític*, ...

Teorema: Per α i r fixats, existeix un cert $\varepsilon_0 > 0$ (que depèn de α i r) per al qual l'operador $(A_\alpha(\varepsilon), \mathcal{D}(A_\alpha))$ quan $\varepsilon < \varepsilon_0$ admet $\left\{\lambda_0^+(\varepsilon), \lambda_0^-(\varepsilon)\right\}$ com a subconjunt de dos valors propis dominants simples, on:

$$\lambda_0^+(\varepsilon) = i\sqrt{\varepsilon} - \frac{\alpha + r}{2}\,\varepsilon - i\,\frac{4 + 3(\alpha + r)^2}{24}\,(\sqrt{\varepsilon})^3 + O(\varepsilon^2)$$

$$\lambda_0^-(\varepsilon) = -i\sqrt{\varepsilon} - \frac{\alpha + r}{2}\,\varepsilon + i\,\frac{4 + 3(\alpha + r)^2}{24}\,(\sqrt{\varepsilon})^3 + O(\varepsilon^2)$$

Aquests dos valors propis són pertorbacions del valor propi doble de $A_\alpha(0)$, $\lambda_0(0) = 0$.

Corol.lari: Les solucions del model en derivades parcials quan ε és petit es poden aproximar, quan $t \to \infty$ per les solucions de l'**EDO límit**:

$$m\, w'' + k_1\, w' + k_2\, w = 0$$

amb

$$k_1 = \left(\frac{E_1}{L} + q + \dots \right)$$

$$k_2 = \frac{E}{L} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\rho L}{m} \right) + \frac{\left(4 + \frac{3}{E\rho} \left(\frac{E_1}{L} + q \right)^2 \right)^2}{576} \cdot \left(\frac{\rho L}{m} \right)^2 + \dots \right]$$

i on la solució $w(t)$ es pot interpretar com una aproximació de $u(L, t)$.

Obs: NO és l'equació clàssica de la molla!! Té sentit el model en derivades parcials.

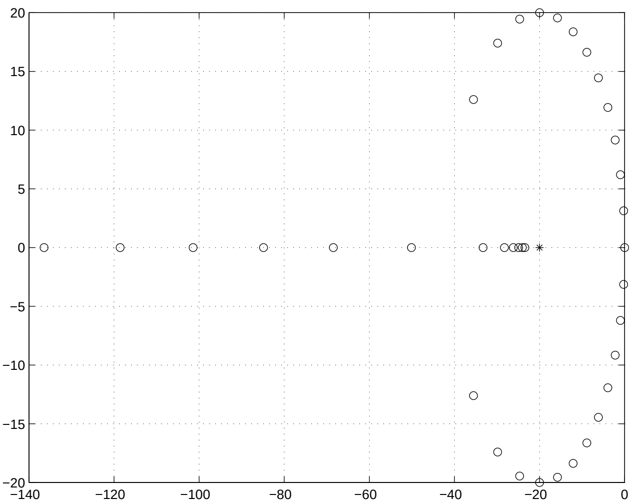
1. VALORS PROPIS DELS OPERADORS.

El cas $\varepsilon = 0$ (o massa infinita a l'extrem) és explícit: podem trobar vaps i funcions pròpies de $A_\alpha(0)$ $(u_n(x,t) = e^{\lambda_n t} u_n(x))$.

$$\lambda_n = \frac{-\alpha\,\pi^2 n^2 \pm \sqrt{\alpha^2 \pi^4 n^4 - 4\pi^2 n^2}}{2},\ n = 0, 1, 2, \cdots$$

En aquest cas, $\lambda_0 = 0$ és *valor propi*, és *doble* i és *dominant*.

Geometria dels valors propis:



VALORS PROPIS PER $A_\alpha(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$: compleixen l'equació característica següent (solucions de la forma $u(x,t) = e^{\lambda\, t}\, u(x)$):

$$e^{\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda\alpha}}}\left[\lambda + \varepsilon\sqrt{1+\lambda\alpha} + \varepsilon\, r\right] = e^{\frac{-\lambda}{\sqrt{1+\lambda\alpha}}}\left[\lambda - \varepsilon\sqrt{1+\lambda\alpha} + \varepsilon\, r\right]$$

Una petita pertorbació de $A_\alpha(0)$ en $A_\alpha(\varepsilon)$ trenca el valor propi $\lambda_0(0) = 0$ en dos valors propis complexos conjugats, que es poden escriure com a sèrie de potències en $i\sqrt{(\varepsilon)}$:

$$\lambda_0^+(\varepsilon) = i\sqrt{\varepsilon} - \frac{\alpha + r}{2}\,\varepsilon - i\,\frac{4 + 3(\alpha + r)^2}{24}\,(\sqrt{\varepsilon})^3 + O(\varepsilon^2)$$

$$\lambda_0^-(\varepsilon) = -i\sqrt{\varepsilon} - \frac{\alpha + r}{2}\,\varepsilon + i\,\frac{4 + 3(\alpha + r)^2}{24}\,(\sqrt{\varepsilon})^3 + O(\varepsilon^2)$$

Les pertorbacions del valor propi dominant $\lambda_0(0) = 0$ són també dominants? Sí, si ε és prou petit ...

2. ESPECTRE ESSENCIAL DELS OPERADORS.

Lema 1: L'operador $A_\alpha(\varepsilon)$, amb $\alpha > 0$ i $\varepsilon \geq 0$, té espectre essencial $\left\{\dfrac{-1}{\alpha}\right\}$ *(Henry, Gohberg-Krejn)*.

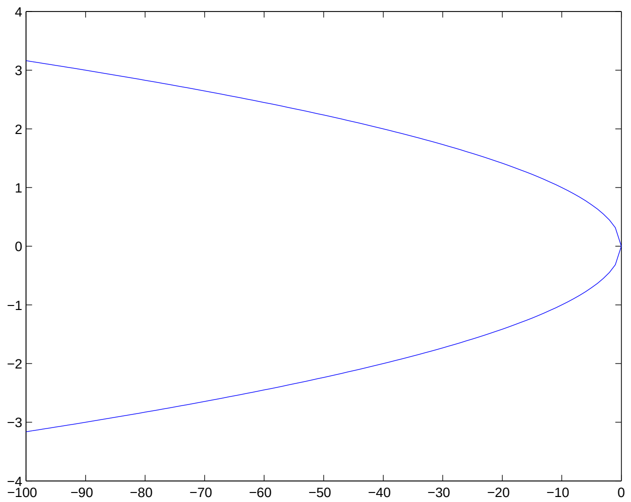
Idea dem: L'espectre essencial és *estable* per pertorbacions relativament compactes.

3. RANG NUMÈRIC.

Lema 2: L'espectre de $A_\alpha(\varepsilon)$ està contingut $\forall\varepsilon > 0$ en el sector

$$S_\alpha = \left\{ y = \pm 2\sqrt{\frac{-x}{\alpha}},\, x < 0 \right\}$$

que no depèn de ε



Idea dem: El rang numèric d'un operador és $\Theta(T) = \{\langle Tu, u\rangle \in \mathbb{C},\, u \in \mathcal{D}(T),\, \|u\|_X = 1\}$. En el nostre cas,

$$\Theta(A_\alpha(\varepsilon)) \subset S_\alpha,\ \forall\varepsilon > 0, \forall\alpha > 0$$

I com que $R(A_\alpha(\varepsilon) - Id) = \mathcal{H}$, tenim que $\sigma(A_\alpha(\varepsilon)) \subset \Theta(A_\alpha(\varepsilon)) \subset S_\alpha$.

4. CONVERGÈNCIA GENERALITZADA DELS OPERADORS.

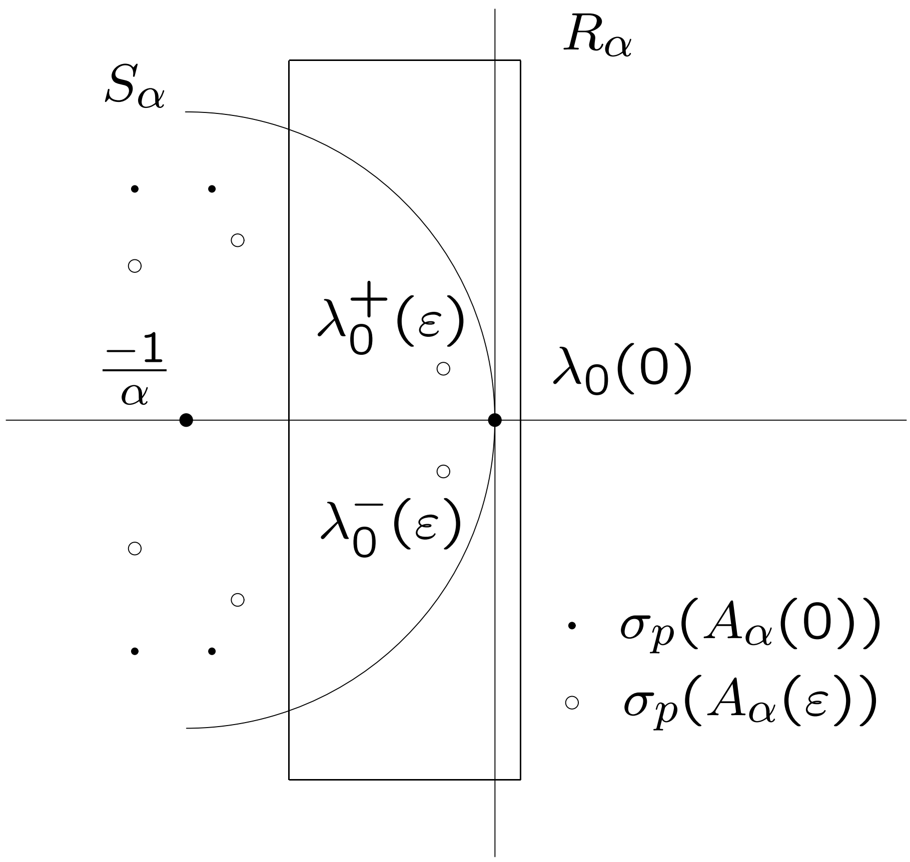
Lema 3: $A_\alpha(\varepsilon)$ convergeix en sentit generalitzat a $A_\alpha(0)$ quan $\varepsilon \to 0$, per $\alpha > 0$ fixat
($\to$ certa continuïtat dels valors propis si ε prou petit...)

Idea dem: Només cal veure que:

$$\left\| (A_\alpha(\varepsilon) - Id)^{-1} - (A_\alpha(0) - Id)^{-1} \right\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

Demostració teorema: Només cal trobar un compacte R_α tal que:

- l'únic vap de $A_\alpha(0)$ que hi pertanyi sigui $\lambda_0(0) = 0$
- sigui més alt que S_α
- no contingui l'espectre essencial, $\dfrac{-1}{\alpha}$



Llavors, el teorema de pertorbació de Kato ens garanteix que existeix un $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\alpha, r)$ tal que els únics vaps de $A_\alpha(0)$ si $\varepsilon < \varepsilon_0$ en R_α seran $\lambda_0^+(\varepsilon)$ i $\lambda_0^-(\varepsilon)$. I tal com hem escollit R_α no hi ha valors propis amb part real major que la d'aquests.

$$\Downarrow$$

són **valors propis dominants**.

UN ALTRE PUNT DE VISTA: FORÇA EXTERNA APLICADA A LA MASSA

Apliquem una força externa $f(t) = A\,e^{i\omega t}$ a la massa m de l'extrem. El model és ara:

$$\begin{cases} \rho\, u_{tt} \;=\; E_1\, u_{txx} + E\, u_{xx}, \quad 0 < x < L,\ t > 0 \\[2ex] u(0,t) = 0 \\[2ex] m\, u_{tt}(L,t) = -E\, u_x(L,t) - E_1\, u_{tx}(L,t) - q\, u_t(L,t) + A\, e^{i\omega t} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

EDO límit?

Idea: buscar les solucions globalment acotades $\rightsquigarrow$ nova eina: *funcions de transferència.*

Volem determinar els coeficients de l'EDO de segon ordre

$$k_2\, x''(t) + k_1\, x'(t) + k_0\, x(t) = A\, e^{i\omega t}$$

Busquem la única solució globalment acotada $x(t) = B\, e^{i\omega t}$

SOLUCIÓ EDO (globalment acotada):

$$x(t) = \frac{A}{k_0 - \omega^2\, k_2 + k_1\, \omega\, i}\, e^{i\omega t}$$

FUNCIÓ DE TRANSFERÈNCIA DE L'EDO:

$$H_{edo} = H_{edo}(\omega) = \frac{1}{k_0 - \omega^2\, k_2 + k_1\, \omega\, i}$$

Podem fer el mateix amb l'EDP: busquem solucions globalment acotades (en el temps) i tals que $u(0,t) = 0$, és a dir, $u(x,t) = B\,e^{i\omega t}\,\mathsf{sinh}\,ax$.

SOLUCIÓ EDP (globalment acotada):

$$u(x,t) = \frac{A\,e^{i\omega t}\,\mathsf{sinh}\,ax}{[-\omega^2 m\,\mathsf{sinh}(aL) + Ea\,\mathsf{cosh}(aL)] + i\omega\,[E_1 a\,\mathsf{cosh}(aL) + q\,\mathsf{sinh}(aL)]}$$

on

$$a^2 = \frac{-\omega^2\rho}{E + E_1\omega i}$$

FUNCIÓ DE TRANSFERÈNCIA DE L'EDP:

$$H_{edp} = H_{edp}(\omega) =$$

$$= \frac{\mathsf{sinh}\,ax}{[-\omega^2 m\,\mathsf{sinh}(aL) + Ea\,\mathsf{cosh}(aL)] + i\omega[E_1 a\,\mathsf{cosh}(aL) + q\,\mathsf{sinh}(aL)]}$$

Volem que $u(L,t)$, solució de l'EDP en $x = L$, s'aproximi a $x(t)$, solució de l'EDO, almenys quan $\omega \sim 0$.

$$\Downarrow$$

$$H_{edp} \sim H_{edo} \text{ quan } w \sim 0.$$

$$\Downarrow$$

Ens les mirem prop de zero com a sèries de potències amb els mateixos coeficients.

$$H_{edo} = \frac{1}{k_0} - i\,\frac{k_1}{k_0^2}\,\omega + \frac{\frac{k_2}{k_0} - \frac{k_1^2}{k_0^2}}{k_0}\,\omega^2 + O(\omega^3)$$

$$H_{edp} = \frac{L}{E} - i\,\frac{L(E_1 + qL)}{E^2}\,\omega -$$

$$-\frac{L\left(-3LmE - L^2E\rho + 3E_1^2 + 6E_1qL + 3q^2L^2\right)}{3E^3}\,\omega^2 + O(\omega^3)$$

Igualant coeficients tenim:

$$k_0 = \frac{E}{L}$$

$$k_1 = \frac{E_1}{L} + q$$

$$k_2 = m + \frac{1}{3}\rho L$$

Ara $H_{edo} - H_{edp} = 0 + O(\omega^4)$

EDO LÍMIT:

$$\left(m + \frac{1}{3}\rho L\right)\, x''(t) + \left(\frac{E_1}{L} + q\right)\, x'(t) + \left(\frac{E}{L}\right)\, x(t) = A\, e^{iwt}$$

Obs 1: Els coeficients no són aproximacions ni són els mateixos d'abans (fins i tot si imposem que el primer coeficient sigui m), però ara no tenim un sistema homogeni.

Obs 2: Tenim un nou concepte de solució aproximada o EDO límit: l'ordre d'aproximació ve donat per l'ordre d'aproximació de H_{edp} a H_{edo} $\Rightarrow$ això ens determina l'ordre de l'EDO límit (ara NO determinat pel nombre de vaps dominants). Si volem $H_{edo} - H_{edp}$ d'ordre superior, cal agafar una EDO límit també d'ordre major.