Operadors autoadjunts

i decaïment òptim

en sistemes amb dissipació forta

(M.P. i Joan Solà-Morales)

UPC, 3 d'abril de 2008

Esquema

1. Motivació del problema
2. L autoadjunt amb un cert producte escalar
3. Decaïment de solucions regulars
4. Optimalitat del decaïment anterior

1. MOTIVACIÓ

El problema

Equació d'ones amb **dissipació forta** ($\alpha > 0$):

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha \triangle u_t - \triangle u = 0, \quad \Omega \times (0, \infty) \\ \\ u = 0, \quad \partial\Omega \times (0, \infty) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Comportament de les solucions quan α gran?
(règim de **sobre-esmorteïment**)

L'anàlisi espectral mostra dos fenòmens interessants:

- $\boxed{\sigma_p = \{\mu_n^{\pm}\} \text{ amb } \mu_n^+ \to -\frac{1}{\alpha},\ \sigma_{ess} = \{-\frac{1}{\alpha}\},\ \text{i } \mu_n^- \to -\infty.}$

  Així, les solucions **decauen** com

$$e^{-\frac{1}{\alpha}t}$$

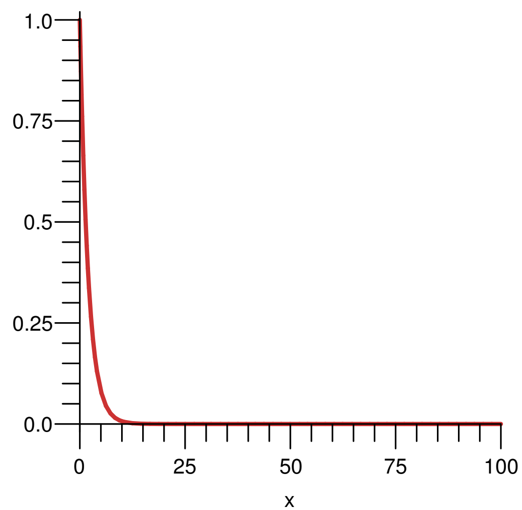
L'anàlisi espectral mostra dos fenòmens interessants:

- $\boxed{\sigma_p = \{\mu_n^{\pm}\} \text{ amb } \mu_n^+ \to -\frac{1}{\alpha},\ \sigma_{ess} = \{-\frac{1}{\alpha}\},\text{ i } \mu_n^- \to -\infty.}$

Així, les solucions **decauen** com

$$e^{-\frac{1}{\alpha}t}$$

Per tant, tenim el fenomen de **sobre-esmorteïment** quan α es fa gran.



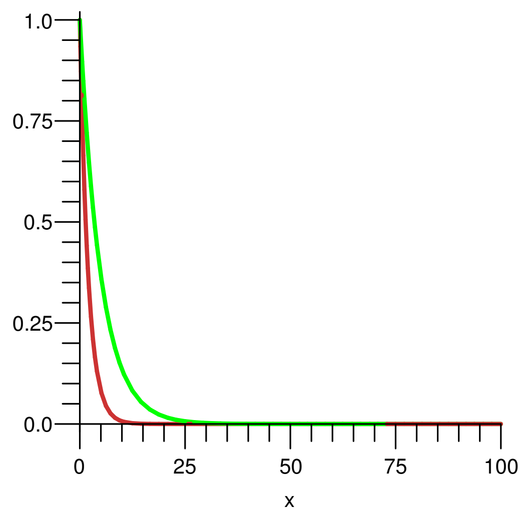
L'anàlisi espectral mostra dos fenòmens interessants:

- $\boxed{\sigma_p = \{\mu_n^{\pm}\} \text{ amb } \mu_n^{+} \to -\frac{1}{\alpha},\ \sigma_{ess} = \{-\frac{1}{\alpha}\},\ \text{i } \mu_n^{-} \to -\infty.}$

  Així, les solucions **decauen** com

$$e^{-\frac{1}{\alpha}t}$$

  Per tant, tenim el fenomen de **sobre-esmorteïment** quan α es fa gran.



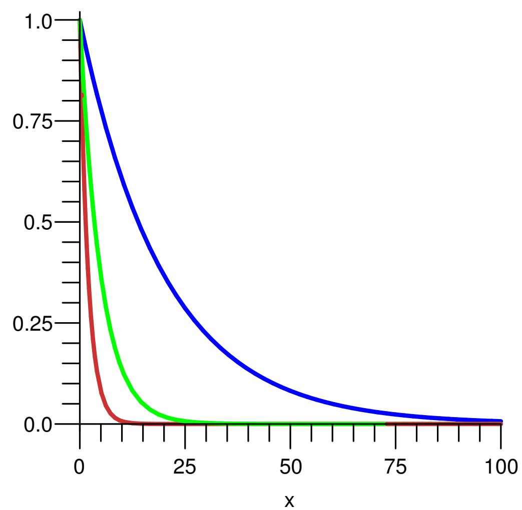
L'anàlisi espectral mostra dos fenòmens interessants:

- $\boxed{\sigma_p = \{\mu_n^{\pm}\} \text{ amb } \mu_n^{+} \to -\frac{1}{\alpha},\ \sigma_{ess} = \{-\frac{1}{\alpha}\},\ \text{i } \mu_n^{-} \to -\infty.}$

  Així, les solucions **decauen** com

$$e^{-\frac{1}{\alpha}t}$$

  Per tant, tenim el fenomen de **sobre-esmorteïment** quan α es fa gran.



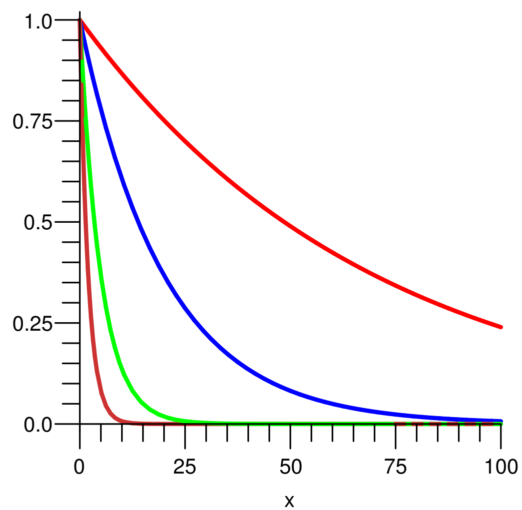
L'anàlisi espectral mostra dos fenòmens interessants:

- $\boxed{\sigma_p = \{\mu_n^{\pm}\} \text{ amb } \mu_n^+ \to -\frac{1}{\alpha},\ \sigma_{ess} = \{-\frac{1}{\alpha}\},\text{ i } \mu_n^- \to -\infty.}$

  Així, les solucions **decauen** com

$$e^{-\frac{1}{\alpha}t}$$

  Per tant, tenim el fenomen de **sobre-esmorteïment** quan α es fa gran.



L'anàlisi espectral mostra dos fenòmens interessants:

- $\boxed{\sigma_p = \{\mu_n^{\pm}\} \text{ amb } \mu_n^{+} \to -\frac{1}{\alpha},\ \sigma_{ess} = \{-\frac{1}{\alpha}\},\ \text{i } \mu_n^{-} \to -\infty.}$

Així, les solucions **decauen** com

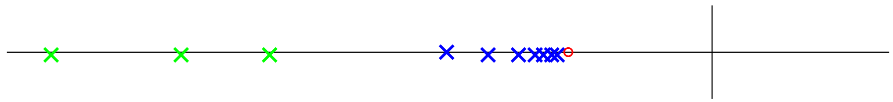
$$e^{-\frac{1}{\alpha}t}$$

Per tant, tenim el fenomen de **sobre-esmorteïment** quan α es fa gran.

PREGUNTA: Podem aconseguir un **decaïment millor**, potser per a solucions més regulars?

$$\text{Ex. } \frac{e^{-\frac{1}{\alpha}t}}{\sqrt{t}}$$

- $\boxed{\sigma \subset \mathbb{R} \text{ quan } \alpha \text{ és gran.}}$



PREGUNTA: Hi ha algun producte escalar on el problema sigui **autoadjunt**?

OBJECTIU: Contestar aquestes preguntes per a l'equació

$$\boxed{u_{tt} - \alpha B u_t - Au = 0, \quad \Omega \times (0, \infty)}$$

per a operadors A, B sota certes condicions.

Resposta: sí, quan α és prou gran (règim de sobre-esmorteïment)

Incís: sobre-esmorteïment en EDOs

Considerem

$$x'' + \alpha x' + kx = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

Volem un producte escalar on L simètrica.

- Hem trobat un producte on sí és possible:

$$\left(\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}\right)_E := \left(\begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{2} - k & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2} \right)$$

sempre i quan $\boxed{\alpha > 2\sqrt{k}}$ (**sobre-esmorteïment** per EDOs)

- Font del nou producte escalar per a l'EDP

Tornem a l'EDP ...

Escrivim l'equació com:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}$$

amb

$$L : \mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(B) \subset X \to X = \mathcal{D}(B) \times \mathcal{H}$$

definit com $L = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & -\alpha B \end{pmatrix}$.

Inspirats en els resultats per EDOs ...

2. L AUTOADJUNT

Teorema 1

Suposem que

(H1) A i B estrictament positius, autoadjunts i amb resolvent compacta

$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$ contínuament.

(H2) $(Au_1, Bu_2)_{\mathcal{H}} = (Bu_1, Au_2)_{\mathcal{H}}$ per a tot $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A)$

(**commutativitat**).

(H3) $\alpha > 2M$ (condició de **sobre-esmorteïment**)

(on $\left\|A^{1/2}u\right\|_{\mathcal{H}} \leq M \left\|Bu\right\|_{\mathcal{H}}$)

Llavors,

- L és **autoadjunt** amb el **nou** producte escalar $(\ ,\ )_E$:

$$\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right)_E := \frac{\alpha^2}{2} (Bu_1, Bu_2)_{\mathcal{H}} - \left(A^{\frac{1}{2}} u_1, A^{\frac{1}{2}} u_2 \right)_{\mathcal{H}}$$

$$+\frac{\alpha}{2} (Bu_1, v_2)_{\mathcal{H}} + \frac{\alpha}{2} (v_1, Bu_2)_{\mathcal{H}} + (v_1, v_2)_{\mathcal{H}} \,.$$

- L és **dissipatiu** amb aquest producte escalar:

$$\left(L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_E \leq 0, \quad \forall \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(L).$$

Comentaris al teorema

- Formalment, és com el producte en el cas d'EDOs

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{2}B^2 - A & \frac{\alpha}{2}B \\ \\ \frac{\alpha}{2}B & \text{Id} \end{pmatrix}$$

- Antecedents.
  - primer cop que producte escalar on el problema és autoadjunt
  - fenomen d'espectre real quan sobre-esmorteïment ja observat [D.L.Russell'75, P.Freitas'97].

- **Corol.lari (conegut).** L genera un semigrup analític

  (Dem. Quan α gran, L autoadjunt + dissipatiu; quan no, pertorbació del cas anterior)

Comentaris al teorema

- Exemples
  - Cas $A = B$. Condició de commutativitat es compleix automàticament i condició de sobre-esmorteïment passa quan $\alpha > 2/\sqrt{\nu}$, on $(Au, u)_{\mathcal{H}} \geq \nu(u, u)_{\mathcal{H}}$, $\nu > 0$
  - Cas $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $A = B = \triangle$:

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_E^2 = \frac{\alpha^2}{2} \int_\Omega |\Delta u|^2 - \int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\alpha}{2} \int_\Omega (\Delta u)\overline{v} - \frac{\alpha}{2} \int_\Omega v(\Delta \overline{u}) + \int_\Omega |v|^2$$

  - Cas $A \neq B$ complint les hipòtesis del teorema: $B = aA + b\, Id$, $B = A^{\frac{1}{2}}$, ... però no $B = aA + b(x)\, Id$

Demostració del teorema

Esquema:

- Producte ben definit
- L simètric i invertible amb $(\ ,\ )_E$
- L dissipatiu amb $(\ ,\ )_E$

Demostració del teorema (I)

1. Producte $(\ ,\ )_E$ ben definit i equivalent a $(\ ,\ )_X$

Volem veure que $\left\|(u,v)^T\right\|_E \geq 0$. Ho escrivim i juguem amb els termes, fins que s'ha de veure que

$$\left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{4(1-\varepsilon)} - \varepsilon\right) \|Bu\|_{\mathcal{H}}^2 \geq^{?} \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|_{\mathcal{H}}^2$$

per $0 < \varepsilon < 1$. Com que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{4(1-\varepsilon)} - \varepsilon\right) = \frac{\alpha^2}{4}$$

Demostració del teorema (I)

1. Producte $(\ ,\ )_E$ ben definit i equivalent a $(\ ,\ )_X$

Volem veure que $\left\|(u,v)^T\right\|_E \geq 0$. Ho escrivim i juguem amb els termes, fins que s'ha de veure que

$$\left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{4(1-\varepsilon)} - \varepsilon\right)\|Bu\|^2_{\mathcal{H}} \geq^{?} \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2_{\mathcal{H}}$$

per $0 < \varepsilon < 1$. Com que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{4(1-\varepsilon)} - \varepsilon\right) = \frac{\alpha^2}{4} \quad > \quad M^2$$

cert si **(H3), sobre-esmorteïment**

Demostració del teorema (I)

1. Producte $(\ ,\ )_E$ ben definit i equivalent a $(\ ,\ )_X$

Volem veure que $\left\|(u,v)^T\right\|_E \geq 0$. Ho escrivim i juguem amb els termes, fins que s'ha de veure que

$$\left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{4(1-\varepsilon)} - \varepsilon\right) \|Bu\|^2_{\mathcal{H}} \stackrel{?}{\geq} \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2_{\mathcal{H}}$$

per $0 < \varepsilon < 1$. Com que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{4(1-\varepsilon)} - \varepsilon\right) = \frac{\alpha^2}{4} \quad > \quad M^2$$

cert si **(H3), sobre-esmorteïment**

Usant també la **inclusió contínua** $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$, **(H1)** , ja ho hem demostrat (amb això també veiem que equivalent al producte habitual $(\ ,\ )_X$). ✓

Demostració del teorema (II)

2.1. L simètric amb $(\ ,\ )_E$

Volem veure que

$$\left(L \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right)_E \stackrel{?}{=} \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, L \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right)_E$$

Escrivim aquests productes:
tot va bé perquè A, B són **autoadjunts (H1)** .

L'únic terme conflictiu és:

$$(\,(Au_1, Bu_2\,)_{\mathcal{H}} \ \stackrel{?}{=} \ (\,(Bu_1, Au_2\,)_{\mathcal{H}}$$

Demostració del teorema (II)

2.1. L simètric amb $(\ ,\ )_E$

Volem veure que

$$\left(L \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right)_E \stackrel{?}{=} \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, L \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right)_E$$

Escrivim aquests productes:
tot va bé perquè A, B són **autoadjunts (H1)** .

L'únic terme conflictiu és:

$$(\,(Au_1, Bu_2\,)_{\mathcal{H}} \quad = \quad (\,(Bu_1, Au_2\,)_{\mathcal{H}}$$

cert si **(H2), commutativitat**

Demostració del teorema (II)

2.2. L invertible

El problema a invertir és

$$\begin{pmatrix} v \\ -Au - \alpha B v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

que és invertible ja que A és **estrictament positiu (H1)**.

$\boxed{\text{Per tant, } L \text{ és autoadjunt amb } (\ ,\ )_E}$ ✓

Demostració del teorema (III)

3. L **és dissipatiu amb** $(\ ,\ )_E$

Volem veure

$$\left(L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_E \leq 0$$

Escrivint-ho, acaba essent equivalent a veure que

$$\left(\mathrm{Re}\,(\, Au, v\,)_{\mathcal{H}}\right)^2 < \frac{\alpha^2}{4}(\, Bv, v\,)_{\mathcal{H}} \cdot (\, Au, Bu\,)_{\mathcal{H}}$$

Demostració del teorema (III)

3. L **és dissipatiu amb** $(\ ,\ )_E$

Volem veure

$$\left(L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_E \leq 0$$

Escrivint-ho, acaba essent equivalent a veure que

$$(\text{Re}\,(Au, v)_{\mathcal{H}})^2 < \frac{\alpha^2}{4} (Bv, v)_{\mathcal{H}} \cdot (Au, Bu)_{\mathcal{H}}$$

Per veure-ho, calen dos lemes

- **Lema 1** $\left(A^{\frac{1}{2}} u, u \right)_{\mathcal{H}} \leq M\,(Bu, u)_{\mathcal{H}}$.
- **Lema 2** $\left(A^{\frac{1}{2}} u_1, Bu_2 \right)_{\mathcal{H}} = \left(Bu_1, A^{\frac{1}{2}} u_2 \right)_{\mathcal{H}}$.

Certs si **base comuna de funcions pròpies per** A **i** B , i **(H3)** ✓.

3. DECAÏMENT DE SOLUCIONS REGULARS (CAS $A = B$)

Teorema 2

Considerem $u_{tt} + \alpha A u_t + Au = 0$ tal que

- mateixes hipòtesis del teorema 1
- $\sigma(A) = \{\lambda_n\}$, vaps de multiplicitat finita, amb $\lambda_n \to \infty$, i les funcions pròpies corresponents completes en $\mathcal{H}$

Teorema 2

Considerem $u_{tt} + \alpha A u_t + Au = 0$ tal que

- mateixes hipòtesis del teorema 1
- $\sigma(A) = \{\lambda_n\}$, vaps de multiplicitat finita, amb $\lambda_n \to \infty$, i les funcions pròpies corresponents completes en $\mathcal{H}$

Aleshores:

- en general, $\left\| e^{Lt} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} \leq e^{-\frac{1}{\alpha}t}$
- però, per a cada $\gamma \geq 0$, si

$$(u(0), v(0))^T \in R_\gamma = \left\{ (u, v) \in \mathcal{D}(A) \times \mathcal{H},\ \alpha A u + v \in \mathcal{D}(A^{\gamma/2}) \right\}$$

llavors

$$\|e^{Lt}\|_{\mathcal{L}(R_\gamma,\mathcal{H})} \leq K \, \frac{e^{-\frac{1}{\alpha}t}}{t^{\frac{\gamma}{2}}}.$$

(**decaïment exponencial-polinomial** per a solucions més regulars)

Comentaris al teorema

- Fenomen de **sobre-esmorteïment** si només decaïment exponencial

Comentaris al teorema

- Fenomen de **sobre-esmorteïment** si només decaïment exponencial
- Decaïment: interessant des del punt de vista del **control** ($\simeq$ velocitat de control.labilitat / taxa d'estabilització)

Comentaris al teorema

- Fenomen de **sobre-esmorteïment** si només decaïment exponencial
- Decaïment: interessant des del punt de vista del **control** ($\simeq$ velocitat de control.labilitat / taxa d'estabilització)
- Antecedents
  - Decaïment **polinomial** per a solucions regulars, però no exponencial-polinomial
  - Diferents **mètodes**:

    desigualtats d'observabilitat

    (Ex. Lebeau & Zuazua'99, Muñoz-Rivera & Racke'01,

    Rao & Wehbe'05, ...)

Comentaris al teorema

- Fenomen de **sobre-esmorteïment** si només decaïment exponencial
- Decaïment: interessant des del punt de vista del **control** ($\simeq$ velocitat de control.labilitat / taxa d'estabilització)
- Antecedents
  - Decaïment **polinomial** per a solucions regulars, però no exponencial-polinomial
  - Diferents **mètodes**:

    anàlisi espectral i acotacions de la resolvent

    (Ex. Liu & Rao'05, Bátkai et al.'06, Muñoz-Rivera & Quintanilla'08, ...)

Comentaris al teorema

- Fenomen de **sobre-esmorteïment** si només decaïment exponencial
- Decaïment: interessant des del punt de vista del **control** ($\simeq$ velocitat de control.labilitat / taxa d'estabilització)
- Antecedents
  - Decaïment **polinomial** per a solucions regulars, però no exponencial-polinomial
  - Diferents **mètodes**:

    bases de Riesz (Ex. Littman & Liu'99, Zhang & Zuazua'03, ...)

    ...

    (nostre: propietat semblant usant que L autoadjunt)

Demostració del teorema (I)

Caracterització de vaps/fups de L

Tenim $\sigma(A) = \{\lambda_n\}$, $\lambda_n \to +\infty$, amb funcions pròpies $\{\varphi_n\}$ completes en $\mathcal{H}$. Llavors,

- $\sigma(L) \subset (-\infty, -1/\alpha]$ i tenim dues successions de vaps de L:

$$\mu_n^- = \frac{-\lambda_n \alpha - \sqrt{\lambda_n^2 \alpha^2 - 4\lambda_n}}{2} \to -\infty$$

  i

$$\mu_n^+ = \frac{-\lambda_n \alpha + \sqrt{\lambda_n^2 \alpha^2 - 4\lambda_n}}{2} \to -\frac{1}{\alpha} \notin \sigma_p(L)$$

- Les funcions pròpies de L, $\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \mu_n^\pm \varphi_n \end{pmatrix}$, són completes en X.

(Obs. Si $A \neq B$ es complica aquesta caracterització)

Demostració del teorema (II)

Com que L **autoadjunt**, tenim una base de funcions pròpies $\{\overrightarrow{\mathrm{e}_n^{\pm}}\}$ ortonormals en $(\;,\;)_E$. Per tant, si tenim la condició inicial

$$\overrightarrow{U}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overrightarrow{\mathrm{e}_n^{+}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \overrightarrow{\mathrm{e}_n^{-}}$$

llavors la solució ve donada per

$$\overrightarrow{U}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\mu_n^{+} t}\, \overrightarrow{\mathrm{e}_n^{+}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\mu_n^{-} t}\, \overrightarrow{\mathrm{e}_n^{-}}.$$

D'on,

$$\left\| \overrightarrow{U}(t) \right\|_E^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{2\mu_n^{+} t} + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 e^{2\mu_n^{-} t}$$

Juguem amb els termes i tenim

$$\left\| \overrightarrow{U}(t) \right\|_E^2 <$$

$$\left(\frac{\gamma^\gamma}{e^\gamma}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{\left[-2\left(\mu_n^+ + \frac{1}{\alpha}\right)\right]^\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|^2}{\left[-2\left(\mu_n^- + \frac{1}{\alpha}\right)\right]^\gamma} \right) \cdot \frac{e^{-\frac{2}{\alpha}t}}{t^{\frac{\gamma}{2}}}.$$

Si volem que això convergeixi, el problema és aconseguir que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{\left[-2\left(\mu_n^+ + \frac{1}{\alpha}\right)\right]^\gamma} < \infty.}$$

Intuïtivament, això és cert si

$$P^+(c.i) \in \mathcal{D}(\left(-L - \frac{1}{\alpha} Id\right)^{-\frac{\gamma}{2}})$$

Com ho veiem?

Desenvolupant-ho tot en sèries en termes de λ_n, hem d'estudiar la convergència de :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \, \frac{\alpha^{3\gamma}}{2^\gamma} \, \lambda_n^\gamma \left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) \right]$$

és a dir, hem de veure quan

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n| \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}} \right)^2 < \infty}$$

Ho hem escrit quan la condició inicial donada en la base de fups ortonormals en $(\ ,\ )_E$:

$$\overrightarrow{\mathrm{e}_n^{\pm}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\lambda_n^2\alpha^2 - 4\lambda_n)}} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \mu_n^{\pm}\varphi_n \end{pmatrix}$$

Però va millor escriure-ho en una altra base:

$$\begin{pmatrix} \varphi_n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_n \end{pmatrix}.$$

Escrivim a_n en termes dels coeficients en la nova base, α_n, β_n:

$$a_n = \frac{-\alpha_n\mu_n^- + \beta_n}{\sqrt{2}}.$$

Podem veure que és suficient estudiar quan

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(|\alpha\lambda_n\alpha_n+\beta_n|\,\lambda_n^{\frac{\gamma}{2}}\right)^2<\infty.}$$

Tenim convergència si la condició inicial compleix que

$$\alpha Au(0)+v(0)\in\mathcal{D}(A^{\gamma/2})$$

és a dir, si

$$\boxed{(u(0),v(0))^T\in R_\gamma=\left\{(u,v)\in\mathcal{D}(A)\times\mathcal{H},\ \alpha Au+v\in\mathcal{D}(A^{\gamma/2})\right\}}\ \checkmark$$

(Obs. Condició "equivalent"a la que hem trobat intuïtivament)

4. OPTIMALITAT DEL DECAÏMENT ANTERIOR

Teorema 3

Sota les hipòtesis anteriors, el decaïment si la condició inicial està en R_γ és **òptim** en el sentit següent: **no existeixen**

$$G : R_\gamma \longrightarrow [0,\infty)$$

$$\phi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty) \text{ amb } \phi(t) \to 0 \text{ quan } t \to \infty$$

tals que

$$\left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \right\|_X \leq G\left(\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} \right) \frac{e^{-\frac{1}{\alpha}t}}{t^{\frac{\gamma}{2}}} \phi(t)$$

per a tota $t \geq 0$ i tot $\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} \in R_\gamma$.

Comentaris al teorema

- Optimalitat en R_γ en conjunt,
  però potser millor decaïment per a certs elements de R_γ.

- Antecedents: en general, no massa per a aquests tipus de problemes (i no quan decaïment exponencial-polinomial).

  (Dels anteriors, només en Zhang & Zuazua'03;
  en Liu & Rao'05 es comenta que no decaïment òptim)

Demostració del teorema 3

Suposem que sí, és a dir, que tenim G, ϕ tals que

$$\boxed{\left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \right\|_X \leq G\left(\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}\right) \frac{e^{-\frac{1}{\alpha}t}}{t^{\frac{\gamma}{2}}} \phi(t), \quad \forall \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} \in R_\gamma}$$

és a dir, l'operador $\dfrac{t^{\frac{\gamma}{2}} e^{\frac{1}{\alpha}t}}{\phi(t)} e^{Lt} \in \mathcal{L}(R_\gamma, X)$ és **unif. acotat** (pel teorema de Banach-Steinhaus):

$$(\clubsuit) \quad \boxed{t^{\frac{\gamma}{2}} e^{\frac{1}{\alpha}t} \left\| \overrightarrow{U}(t) \right\|_X \leq K \left\| \overrightarrow{U}(0) \right\|_{R_\gamma} \phi(t)}$$

per a tot $\overrightarrow{U}(0) \in R_\gamma$, $t \geq 0$.

Demostració del teorema 3

Suposem que sí, és a dir, que tenim G, ϕ tals que

$$\boxed{\left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \right\|_X \leq G\left(\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}\right) \frac{e^{-\frac{1}{\alpha}t}}{t^{\frac{\gamma}{2}}} \phi(t), \quad \forall \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} \in R_\gamma}$$

és a dir, l'operador $\dfrac{t^{\frac{\gamma}{2}} e^{\frac{1}{\alpha}t}}{\phi(t)} e^{Lt} \in \mathcal{L}(R_\gamma, X)$ és **unif. acotat** (pel teorema de Banach-Steinhaus):

$$(\clubsuit) \ \boxed{t^{\frac{\gamma}{2}} e^{\frac{1}{\alpha}t} \left\| \overrightarrow{U}(t) \right\|_X \leq K \left\| \overrightarrow{U}(0) \right\|_{R_\gamma} \phi(t)}$$

per a tot $\overrightarrow{U}(0) \in R_\gamma$, $t \geq 0$.

$\Rightarrow$ trobarem c.i. i $t_n \to \infty$ que ens ho **contradiran**.

- **Família de condicions inicials**

  Trobem $\overrightarrow{r_n}(0) = c_n \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \mu_n^+ \varphi_n \end{pmatrix}$ tq $\|\overrightarrow{r_n}(0)\|_{R_\gamma} = 1$.

$$\overrightarrow{r_n}(0) = \frac{1}{(\lambda_n + \mu_n^+) + \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}}(\alpha\lambda_n + \mu_n^+)} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \mu_n^+ \varphi_n \end{pmatrix}$$

- **Família de condicions inicials**

  Trobem $\overrightarrow{r_n}(0) = c_n \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \mu_n^+ \varphi_n \end{pmatrix}$ tq $\|\overrightarrow{r_n}(0)\|_{R_\gamma} = 1$.

$$\overrightarrow{r_n}(0) = \frac{1}{(\lambda_n + \mu_n^+) + \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}}(\alpha\lambda_n + \mu_n^+)} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \mu_n^+ \varphi_n \end{pmatrix}$$

- **Successió de** $t_n \to \infty$

$$t_n = \frac{-\gamma}{2(\mu_n^+ + \frac{1}{\alpha})}$$

Escrivim (♣) per a aquestes condicions inicials i aquests temps:

$$t^{\frac{\gamma}{2}} e^{\frac{1}{\alpha}t} \left\| \overrightarrow{U}(t) \right\|_X \leq K \left\| \overrightarrow{U}(0) \right\|_{R_\gamma} \phi(t)$$

$$\Downarrow$$

$$t_n^{\frac{\gamma}{2}} e^{\frac{1}{\alpha}t_n} \|\overrightarrow{r_n}(t)\|_X \leq K \cdot 1 \cdot \phi(t_n)$$

$$\Downarrow$$

$$t_n^{\frac{\gamma}{2}} e^{\frac{1}{\alpha}t_n} \frac{\lambda_n + \mu_n^+}{(\lambda_n + \mu_n^+) + \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}}(\alpha\lambda_n + \mu_n^+)} e^{-\frac{\gamma}{2}} e^{-\frac{1}{\alpha}t_n} \leq K\phi(t_n)$$

Clarament, $\lim\limits_{n\to\infty} (K\phi(t_n)) = 0$. I l’esquerra ?

Desenvolupament en sèries en termes de $\lambda_n \to \infty$:

$$\text{esquerra } \simeq \frac{\alpha^{3\gamma^2/4}}{\alpha} + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) \longrightarrow_{n\to\infty} \frac{\alpha^{3\gamma^2/4}}{\alpha}$$

Per tant, quan $n \to \infty$ tenim que de (♣) es dedueix que

$$\boxed{\frac{\alpha^{3\gamma^2/4}}{\alpha} \leq 0, \ \alpha > 0}$$

CONTRADICCIÓ !!!

Desenvolupament en sèries en termes de $\lambda_n \to \infty$:

$$\text{esquerra} \simeq \frac{\alpha^{3\gamma^2/4}}{\alpha} + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) \longrightarrow_{n\to\infty} \frac{\alpha^{3\gamma^2/4}}{\alpha}$$

Per tant, quan $n \to \infty$ tenim que de (♣) es dedueix que

$$\boxed{\frac{\alpha^{3\gamma^2/4}}{\alpha} \leq 0, \ \alpha > 0}$$

CONTRADICCIÓ !!!

Per tant, queda demostrada l'**optimalitat del decreixement** en R_γ ✓.