

**Anàlisi d'un model de
suspensió-amortiment:
projecte de tesi**

Marta Pellicer i Sabadí.

Juliol del 2002

Índex

I	Dades generals del projecte de tesi	5
0.1	Dades d'identificació:	7
0.2	Resum del projecte de tesi.	7
0.3	Antecedents.	8
0.4	Objectius de la tesi.	9
0.5	Pla de treball i calendari.	9
0.6	Estat de l'art: model lineal de suspensió-amortiment.	9
II	Model lineal de suspensió-amortiment.	11
1	Modelització.	13
1.1	Introducció.	13
1.2	El model.	14
1.2.1	Descripció del problema: funcionament físic del sistema en l'automòbil.	15
1.2.2	Deducció del model: llei de medis continus.	16
1.2.3	Adimensionalització dels paràmetres.	17
1.2.4	Deducció del model: models reològics.	19
1.3	Valors propis dominants i reducció a equacions diferencials ordinàries.	30
2	Molla elàstica perfecta ó $\alpha = 0$	33
2.1	Plantejament funcional.	34
2.2	Estudi qualitatiu de les solucions.	40
2.2.1	El conjunt de funcions pròpies de A és complet en \mathcal{H}	40
2.2.2	Valors propis i comportament asimptòtic de les solucions.	46

3	Molla viscoelàstica ó $\alpha > 0$	55
3.1	Plantejament funcional.	55
3.2	Espectre de A_α i valors propis dominants.	60
3.2.1	Resultats previs.	60
3.2.2	Valors propis de A_α	62
3.2.3	Espectre essencial de A_α	67
3.2.4	Existència de valors propis dominants per A_α quan $\alpha > 0$	67
4	Dependència del sistema respecte $\varepsilon \geq 0$.	71
4.1	El cas $\varepsilon = 0$	71
4.1.1	Valors propis i funcions pròpies.	72
4.1.2	Existència d'un valor propi dominant doble.	74
4.1.3	Valors propis per $\varepsilon = 0$	76
4.1.4	Espectre essencial quan $\varepsilon = 0$	81
4.2	Pertorbació de l'espectre respecte $\varepsilon > 0$	87
4.2.1	Pertorbació del valor propi doble $\lambda = 0$ quan $\varepsilon \sim 0$	87
4.2.2	Espectre essencial de $A_\alpha(\varepsilon)$	89
4.2.3	Rang numèric i valors propis dominants.	90

Part I

Dades generals del projecte de tesi

0.1 Dades d'identificació:

1. **Doctorand:** Marta Pellicer i Sabadí
2. **Director de tesi i tutor:** Joan Solà de Morales i Rubió

0.2 Resum del projecte de tesi.

L'objectiu de la primera fase, és modelitzar i estudiar el comportament del sistema físic format per una molla viscoelàstica, fixa en un extrem i subjecta a una massa en l'altre, i per un amortidor, que actua sobre el moviment de la molla a través d'aquesta massa. Es proposa com a model d'aquest dispositiu la següent equació en derivades parcials:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \alpha u_{txx} = 0, & 0 < x < 1 \\ u(0, t) = 0 \\ u_{tt}(1, t) = -\varepsilon [u_x(1, t) + \alpha u_{tx}(1, t) + r u_t(1, t)] \end{cases}$$

on $u = u(x, t)$. És una equació en derivades parcials *lineal* amb *condicions de contorn dinàmiques* que depèn dels paràmetres $\alpha \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$ i $r > 0$.

Sabem que clàssicament el moviment d'una molla amb dissipació interna s'ha modelitzat mitjançant l'equació diferencial ordinària $m u''(t) + r u'(t) + k u(t) = 0$. El nostre propòsit en aquest treball és estudiar el model alternatiu proposat en termes de α i ε i decidir en quins casos l'equació en derivades parcials té com a *límit*, en un sentit que precisarem, l'equació diferencial ordinària. Veurem que aquest fet estarà fortament relacionat amb l'existència o no d'un subconjunt finit de *valors propis dominants*.

En una propera fase de la tesi, es pretèn generalitzar el model per un sistema *no lineal*. Concretament, el sistema en què es pensa és l'anterior molla-massa-amortidor com a braç d'un pèndol sotmès a una certa fricció. Es discutirà un model vàlid en aquest cas no lineal, comparant-lo amb alguns models existents en equacions diferencials ordinàries per a aquests tipus de sistemes. En aquest sentit, s'estudiarà el paper de les *varietats invariants atractores* que, presumiblement, faran el paper que els valors propis dominants feien en el cas lineal.

0.3 Antecedents.

Una versió de l'equació d'ones amb dissipació forta i condicions de contorn dinàmiques que s'estudia en la part lineal del problema, ja havia estat proposada anteriorment per M. Grobbelaar-van Dalsen (veure [GR]):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - u_{xx} - u_{txx} = 0, \quad 0 < x < 1 \\ u(0, t) = 0, \quad u_t(0, t) = 0 \\ u_{tt}(l, t) + u_x(l, t) + u_{tx}(l, t) = 0 \end{array} \right.$$

Concretament, l'autora formula en termes d'operadors l'equació per $\alpha = \varepsilon = 1$ i $r = 0$ (amb la nostra notació) i demostra l'existència d'un *semigrup analític* per a l'operador associat, sense entrar excessivament en la modelització o sentit físic de les equacions i els resultats. En aquest treball, Grobbelaar fa referència als resultats de P. Massat (veure [M]) introduïa pel que fa a l'estudi de la generació de semigrups analítics per part de determinats operadors semilineals amb *dissipació forta*, resultats que seran utilitzats també per nosaltres en aquest sentit (veure el capítol 3).

$$u_{tt} + \alpha A u_t + A u = f(t, u, u_t)$$

Operadors amb dissipació forta, però condicions de Neumann homogènies, són estudiats també en el treball de N. Cònsul i J. Solà-Morales, des d'un punt de vista de l'estabilitat dels seus equilibris.

Pel que fa a les condicions de contorn dinàmiques en equacions hiperbòliques (no amb dissipació forta), podem trobar-ne referències en autors com A. Freiria Neves i O. Lopes (veure [L]) o, des d'un punt de vista de teoria de control, apareixen en treballs d'autors com E. Zuazua o C.M. Castro. També en equacions parabòliques podríem citar autors com J. von Below ([Be-C]).

En aquest treball també s'utilitza fortament les teories clàssiques de semigrups i de pertorbacions d'operadors, amb referències a autors com Pazy ([P]), Kato [K], Henry ([H]) o Gohberg i Krejn ([G-K]). Des d'un punt de vista més físic, hi seran també presents els models clàssics de viscoelasticitat, així com la teoria de models reològics (veure Davis, [D]).

Com a referència per al treball no lineal futur, podríem citar el treball de A.N. Carvalho i G. Lozada-Cruz, en [Ca-L].

0.4 Objectius de la tesi.

L'objectiu principal de la tesi és el de relacionar els models clàssics discrets (models en equacions diferencials ordinàries) amb models continus en derivades parcials per a certs sistemes viscoelàstics. Aquests models es proposaran i deduiran tant en la versió lineal del problema (que és la que es presenta en aquest projecte) com en la no lineal (en procés).

Les eines principals per a aquesta comparació i anàlisi són els valors propis dominants, en el cas lineal, i, presumiblement, les varietats invariants atractores en el cas no lineal.

0.5 Pla de treball i calendari.

Del *Setembre al Desembre del 2002*, es pretén acabar alguns detalls de la versió lineal del problema, així com la redacció d'un article per a aquest cas. S'exposaran els resultats obtinguts en el seminari Equacions en Derivades Parcial i Aplicacions

Durant *l'any 2003*, de *Gener a Desembre*, es treballarà en la versió no lineal del problema: modelització i entorn funcional, estudi del paper de les varietats invariants atractores pel cas no lineal, comparació amb alguns models clàssics en equacions diferencials ordinàries, ... Es preveu acabar aquesta fase a finals del 2003.

0.6 Estat de l'art: model lineal de suspensió-amortiment.

L'estat actual del treball és la versió lineal del problema, que s'estudia a continuació.

Part II

Model lineal de suspensió-amortiment.

Capítol 1

Modelització.

1.1 Introducció.

El propòsit d'aquest treball és modelitzar i analitzar el moviment d'un sistema molla-massa o de suspensió-amortiment.

Aquests sistemes, que explicarem amb detall més endavant i que tenen importància, per exemple, en l'automoció, estan formats per un dispositiu *visco-elàstic* o *elàstic* (una molla amb o sense dissipació interna) i un dispositiu dissipatiu o *viscós* (un amortidor). L'aproximació clàssicament utilitzada com a model del moviment en aquest tipus de sistemes és l'*equació diferencial ordinària* de les oscil·lacions forçades esmorteïdes

$$m \frac{d^2}{dt^2} u(t) = -ku(t) - r \frac{d}{dt} u(t) + \Phi(t) \quad (1.1)$$

on m és la massa, k el coeficient de recuperació, r el de l'amortiment i $\Phi(t)$ una força externa aplicada a la massa.

Aquest model considera la molla com un medi discret i no com un medi continu. En aquest segon cas el moviment depèn de cada punt i, per tant, es consideren les possibles diferències en la deformació interna de la molla, com indica la figura 1.1. Això ens porta a pensar en una *equació en derivades parcials* com a possible model per al nostre sistema.

Tot i mirar-nos el problema des d'una òptica continua, aquest enfoc no és tan diferent del clàssic, almenys en alguns casos. De fet, el nostre objectiu serà demostrar sota quines condicions el model en equacions diferencials ordinàries és *límit*, en algun sentit, del model en derivades parcials.

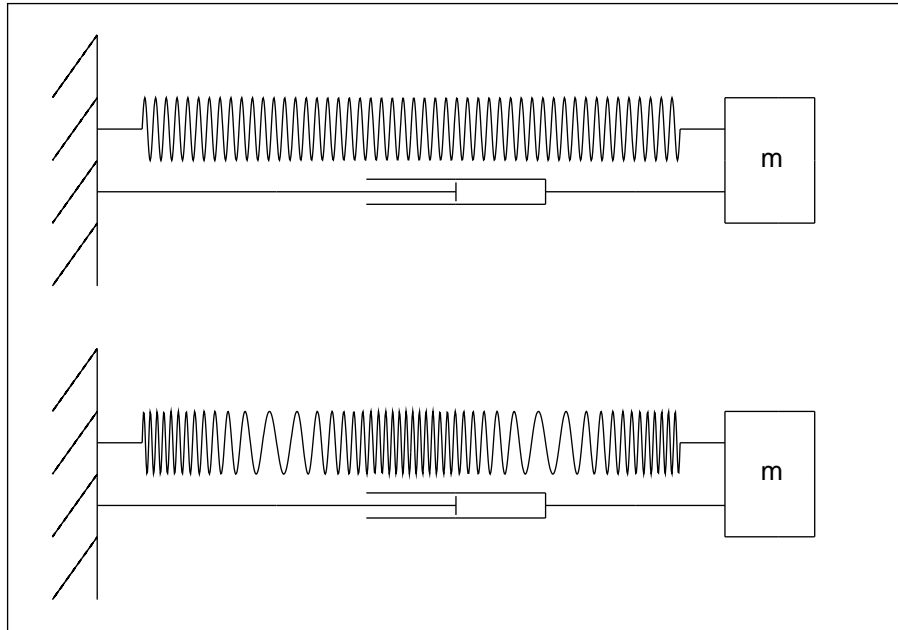


Figura 1.1: Dibuix EDO-EDP

1.2 El model.

Per a fixar idees, pensarem en els sistemes de suspensió-amortiment que podem trobar, per exemple, en els cotxes (amortidors en general) o també en alguns edificis per tal d'esmoreir els moviments sísmics. Aquests sistemes estan formats per una molla (o dispositiu visco-elàstic) i un amortidor (o dispositiu viscós), que actua sobre la molla a través d'una massa, (la roda) situada a l'extrem, esmoreint el moviment total del sistema: en l'automòbil això permet un major control i comoditat en la conducció.

Denotem per $u(x, t)$ el *desplaçament* (posició a temps t menys posició de referència) d'una molla, amb origen $x = 0$, on està fixada a una paret immòbil. És a dir, $x_0 + u(x_0, t_0)$ és la posició a temps $t = t_0$ de la partícula de la molla que en equilibri ocupa la posició $x = x_0$. I suposem que en $x = L$, que és la longitud de la molla, aquesta està soldada a una massa rígida m en possible moviment longitudinal i sense deformació interna, sobre la qual actuen les forces visco-elàstiques de la molla i les viscoses de l'amortidor, que

també hi està soldat. El model matemàtic d'aquesta situació serà deduït en les seccions 1.2.2 i 1.2.4, on s'obtindrà el sistema següent:

$$(1.2) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \alpha u_{txx} = 0, & 0 < x < 1 \\ u(0, t) = 0 \\ u_{tt}(1, t) = -\varepsilon [u_x(1, t) + \alpha u_{tx}(1, t) + r u_t(1, t)] \end{cases}$$

on $\alpha \geq 0$ fa el paper del coeficient de dissipació interna de la molla, $r > 0$ el del coeficient de viscositat de l'amortidor i $\varepsilon > 0$ depèn de la densitat, la massa i la longitud del sistema (vegi's l'apartat 1.2.3). Observem que es tracta d'una equació d'ones amb dissipació forta tant en l'equació com en els condicions de contorn, que són dinàmiques. Això ens modelitza la viscositat en l'interior i en l'extrem de la molla. Aquest model ja va aparèixer uns valors fixats per als paràmetres $r = 0$ i $\alpha = \varepsilon = 1$ a [GR], tot i que no entrava amb detall en la deducció del model.

Una generalització d'aquest model consisteix en considerar una força externa $\Phi(t)$ aplicada a la massa. En aquest cas, el model resultant és similar a l'anterior:

$$(1.3) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \alpha u_{txx} = 0, & 0 < x < 1 \\ u(0, t) = 0 \\ u_{tt}(1, t) = -\varepsilon [u_x(1, t) + \alpha u_{tx}(1, t) + r u_t(1, t) - \Phi(t)] \end{cases}$$

Però nosaltres ens centrarem, d'entrada, en el cas 1.2

1.2.1 Descripció del problema: funcionament físic del sistema en l'automòbil.

En el cas dels cotxes, el medi *visco-elàstic* s'encarrega d'absorbir el canvi de força que es produeix en les rodes quan frenem, accelerem o quan la carretera és irregular: en qualsevol d'aquestes situacions es produeix un desplaçament de pes en el vehicle, canviant la força que s'exerceix en les rodes.

Per evitar la pèrdua d'adherència de les rodes amb el terra, la molla es comprimirà o dilatarà, absorbint amb aquesta acció el canvi de força.

El paper de l'amortidor (medi *viscós*) està en oferir resistència a l'excés de moviment del sistema de suspensió, que per si sol trigaria en aturar-se. L'amortidor controla aquest excés de moviment a través de la roda, connectada a l'amortidor i situada a l'extrem de la molla.

Si ens mirem aquest funcionament des del punt de vista del model, el que tenim és, essencialment, una *equació* que modelitza el comportament a l'*interior* del dispositiu i unes *condicions de contorn* que expliquen l'acció de l'amortidor a l'*extrem*.

1.2.2 Deducció del model: llei de medis continus.

Dins els models dels medis continus més generals que els sòlids elàstics (descrits essencialment per la llei de Hooke), ens trobem amb els sòlids viscoelàstics, que és com s'anomenen aquells materials que combinen les propietats d'un sòlid elàstic (medi continu que, un cop deformat, recupera el seu estat inicial sense pèrdua d'energia) amb les d'un fluid newtonià o viscós (veure [D], pg. 250). Aquestes propietats es manifesten en major o menor grau depenent de la rapidesa a la que es faci l'experiment ([B-H-W], cap.3)

Les equacions que els governen són:

- equació constitutiva d'un medi *elàstic* en un punt x_0

$$\sigma_e(x_0) = Eu_x(x_0)$$

on σ_e representa la força elàstica, E és el mòdul de Young o coeficient elàstic del material i u_x , la deformació relativa del sistema.

La força elàstica que actua sobre el segment $a < x < b$ serà doncs:

$$\sigma_e(a, b) = [Eu_x]_a^b = \int_a^b Eu_{xx} dx$$

- També tenim l'equació constitutiva per a un medi *viscós* en un punt x_0

$$\sigma_v(x_0) = E_1 u_{tx}(x_0)$$

on σ_v representa ara la força viscosa, E_1 és el coeficient de viscositat del material i u_{tx} , la velocitat de deformació relativa del medi.

Com abans, podem considerar la versió continua d'aquesta força viscosa que actua sobre l'interval $a < x < b$:

$$\sigma_v(a, b) = [E_1 u_{tx}]_a^b = \int_a^b E_1 u_{txx} dx$$

Per la llei de Newton (*balanç de quantitat de moviment* en medis continus), la *variació de quantitat de moviment* és:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x) u_t dx = \sigma_e(a, b) + \sigma_v(a, b)$$

d'on s'obté l'*equació del sistema* de suspensió amb viscositat interna:

$$\rho(x) u_{tt} = \overbrace{E_1 u_{txx}}^{\text{viscositat de la molla}} + \overbrace{E u_{xx}}^{\text{elasticitat de la molla}} \quad (1.4)$$

La *condició de contorn* en $x = 0$ és:

$$u(0, t) = 0 \quad (1.5)$$

ja que la molla està fixa a la paret; i aplicant la versió discreta de la llei de balanç de moviments en el punt $x = L$, obtenim que la força total en $x = L$ (en la roda) és igual a la força exercida per la molla en $x = L$ més la força exercida per l'amortidor en $x = L$

$$m u_{tt}(L) = -\sigma_e(L) - \sigma_v(L) - q u_t(L)$$

on q representa el coeficient de fricció de l'amortidor. Així,

$$m u_{tt}(L, t) = -E u_x(L, t) - E_1 u_{tx}(L, t) - q u_t(L, t) \quad (1.6)$$

1.2.3 Adimensionalització dels paràmetres.

Aplicant un canvi de variable adequat a l'equació 1.4 aconseguim fixar els paràmetres de què depèn i fer-los *adimensionals*, és a dir, sense dimensió física. Aquest és un aspecte interessant que s'utilitza sovint en física, ja que és una manera de saber realment quins paràmetres influeixen en l'equació i de quina manera (veure [S], cap. 1).

Partim de l'equació 1.4 amb les condicions de contorn 1.5 i 1.6, on els paràmetres sí tenen dimensió física. Efectivament, $\rho(x)$ és una densitat lineal i, per tant, té dimensió $[\frac{m}{L}]$ (m és la massa i L , la longitud), E té dimensió $[\frac{mL}{t^2}]$ (on t = temps), E_1 té dimensió $[\frac{mL}{t}]$ i q té dimensió $[\frac{m}{t}]$. Si ho comprovem, veurem com les dimensions físiques de les equacions són coherents.

El canvi a variables adimensionals que proposem és el següent:

$$x \longleftrightarrow \frac{x}{L}$$

$$t \longleftrightarrow \frac{t\sqrt{\frac{E}{\rho}}}{L}$$

Ara, la longitud de la molla és 1. També proposem el canvi de funció:

$$u \longleftrightarrow \frac{u}{L}$$

i, en cas que hi hagi una força externa,

$$\Phi \longleftrightarrow \frac{\Phi}{E}$$

I el canvi a paràmetres adimensionals és:

$$\alpha = \frac{E_1}{\sqrt{E\rho}L}$$

$$\varepsilon = \frac{\rho L}{m}$$

$$r = \frac{q}{\sqrt{E\rho}}$$

Substituint les dimensions físiques de les noves variables, les noves funcions i introduint la notació amb els nous paràmetres, veurem que totes aquestes quantitats ara són, efectivament, adimensionals.

Amb aquest canvi obtenim l'equació 1.7, on tant les variables com els paràmetres han perdut la dimensió física: d'alguna manera hem aconseguit reduir-nos als paràmetres realment *importants*, els que en realitat controlen el nostre sistema:

$$(1.7) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \alpha u_{txx} = 0, & 0 < x < 1 \\ u(0, t) = 0 \\ u_{tt}(1, t) = -\varepsilon [u_x(1, t) + \alpha u_{tx}(1, t) + r u_t(1, t)] \end{cases}$$

I, en el cas de tenir una força externa, ens quedaria el sistema següent:

$$(1.8) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \alpha u_{txx} = 0, & 0 < x < 1 \\ u(0, t) = 0 \\ u_{tt}(1, t) = -\varepsilon [u_x(1, t) + \alpha u_{tx}(1, t) + r u_t(1, t) - \Phi(t)] \end{cases}$$

Després del canvi de variables, el model ha quedat com una EDP que depèn dels paràmetres α , ε i r , tots ells no negatius; concretament, es tracta d'una equació d'ones amb *dissipació forta* (controlada per α) provinent de la dissipació interna de la molla en $(0, 1)$, amb condició de contorn Dirichlet homogènia en $x = 0$ i una condició de contorn dinàmica en $x = 1$, extrem on hi ha la roda, on també tenim un terme de dissipació forta (discret) que ve de la molla i controlat, per tant, per α , i una dissipació feble controlada per r que ve de l'acció de l'amortidor. El paràmetre ε depèn del pes, la densitat i la longitud del sistema.

Posteriorment, farem tendir ε a zero, deixant α i r constants: en termes dels paràmetres dimensionals, això s'obtidria, per exemple, prenent límits per $m \rightarrow \infty$ i deixant els altres paràmetres constants. Igualment, quan fem tendir α a zero, el que farem és enviar E_1 a zero (considerarem una molla amb viscositat interna nul.la), de manera que α serà l'únic paràmetre afectat.

1.2.4 Deducció del model: models reològics.

En aquesta secció seguirem el capítol 6 del Davis ([D]), i el Barnes ([B-H-W]). Ja hem vist què eren els materials *viscoelàstics*. La idea dels *models reològics mecànics* és simular el comportament dels materials viscoelàstics lineals mitjançant la combinació d'uns models simples: la *molla* (spring), que simbolitzarà l'elasticitat, i l'*amortidor* (dashpot), que representarà la viscositat.

La combinació d'aquests models en *sèrie* i/o en *paral·lel* dóna lloc al que es coneix com *models reològics mecànics* i pretén ser un model virtual del comportament viscoelàstic del material, que no té perquè estar construït per molles i amortidors. En certa manera, aquests models són una discretització a unitats elementals elàstiques i viscoses d'un medi continu viscoelàstic, portada després a un nivell diferencial (farem el límit d'infinites sistemes d'aquest tipus). És una altra manera, en el fons anàloga a la clàssica, d'enfocar el nostre model. En general, parlem de *reologia* com la ciència que estudia la deformació i flux dels materials (utilitzada en estudi de plàstics, pintures, tintes per impressió ...).

En aquest tipus de models es representa l'elasticitat per una *molla* (veure la figura 1.2), que té per equació constitutiva

$$\sigma_e = E \varepsilon_e \quad (1.9)$$

on σ_e és la tensió elàstica o *elastic stress*, E és el mòdul de Young (constant d'elasticitat del material) i ε_e , la deformació elàstica relativa o *elastic strain*, tot i que en aquests models σ i ε són utilitzats de manera anàloga a força i extensió ([T], pg. 26)

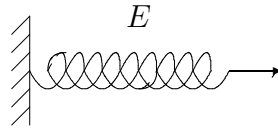


Figura 1.2: Model purament elàstic

El comportament viscos es modelitza mitjançant un amortidor, representat típicament per un pistó que es mou en un cilindre amb líquid (veure la figura 1.3). La seva equació constitutiva és:

$$\sigma_v = E_1 \dot{\varepsilon}_v \quad (1.10)$$

on E_1 és la *viscositat* i $\dot{\varepsilon}_v$ és la velocitat de deformació viscosa o *strain rate* ($\dot{\cdot} = \frac{d}{dt}$).

Aquests dos elements es poden connectar en *sèrie* o en *paral·lel*, donant lloc, mitjançant totes les combinacions possibles, als diferents models. De

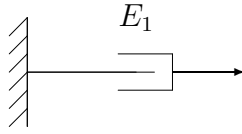


Figura 1.3: Model purament viscos

fet, aquests dos tipus de combinacions responen a dos fenòmens físics concrets dels materials viscoelàstics (*stress relaxation* i *creeping*) ([D], pg.252), però la idea física és que en l'acoblament en paral·lel, les deformacions són iguals i sumem les tensions (veure la figura 1.4), i en l'acoblament en sèrie, les tensions elàstica i viscosa són iguals i se sumen les deformacions (veure la figura 1.5). Les possibles combinacions són infinites, però veurem alguns models reològics clàssics (versió discreta), així com la deducció de les equacions d'alguns models continus.

1. Model de Kelvin-Voigt.

Aquest model consisteix en una combinació molla-amortidor en paral·lel (veure [D]), tal i com s'indica en la figura 1.4

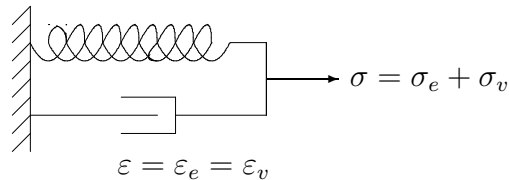


Figura 1.4: Model de Kelvin-Voigt

L'acoblament en paral·lel es tradueix a:

$$\varepsilon_e = \varepsilon_v = \varepsilon$$

i

$$\sigma_e + \sigma_v = \sigma$$

Com que tenim 1.9 i 1.10, el model de K-V és:

$$\sigma = E_1 \dot{\varepsilon} + E \varepsilon \quad (1.11)$$

2. Model de Maxwell.

És la mateixa idea que al model anterior, però acoblant els dos elements en sèrie (veure [D]), tal i com indica la figura 1.5

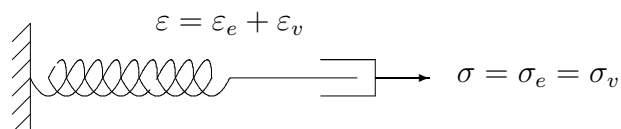


Figura 1.5: Model de Maxwell

En aquest cas,

$$\sigma_e = \sigma_v = \sigma$$

i

$$\varepsilon_e + \varepsilon_v = \varepsilon$$

de manera que l'equació del model de Maxwell és l'equació diferencial:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{E_1} \quad (1.12)$$

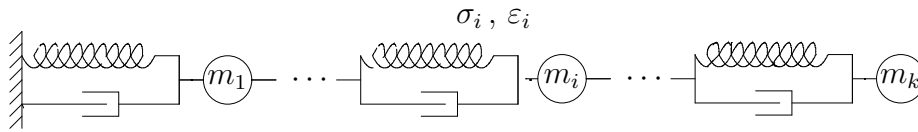


Figura 1.6: Model de Kelvin-Voigt continu

3. Equació d'ones amb dissipació forta o Kelvin-Voigt continu.

Tenim un material que, a nivell diferencial, el podem pensar com una successió de sistemes de Kelvin-Voigt acoblats en sèrie entre ells (el nostre medi continu es pot pensar com a límit d'aquest sistema discret). Com que la connexió és en sèrie, la tensió que suporta cada unitat interior es dedueix igual per a totes. En el sistema \$i\$-èssim tenim l'equació 1.11:

$$\sigma_i = E_1 \dot{\varepsilon}_i + E \varepsilon_i$$

Fent balanç de forces entre el sistema \$i\$-èssim i el \$(i+1)\$-èssim tenim que la força total aplicada a \$m_i\$ és \$\sigma_{i+1} - \sigma_i\$, i:

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} u_i(t) = \sigma_{i+1} - \sigma_i$$

on \$u_i(t)\$ és el desplaçament \$i\$-èssim. Escrivint la massa en termes de la longitud i la densitat del sistema, tenim que:

$$m_i = \rho_i h$$

d'on:

$$\begin{aligned} \rho_i h \frac{d^2}{dt^2} u_i(t) &= (E_1 \dot{\varepsilon}_{i+1} + E \varepsilon_{i+1}) - (E_1 \dot{\varepsilon}_i + E \varepsilon_i) \\ &= E_1 [\dot{\varepsilon}_{i+1} - \dot{\varepsilon}_i] + E [\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i] \end{aligned}$$

La deformació relativa en un medi discret la podem escriure en termes del desplaçament com variació del desplaçament en el sistema partit per la longitud. En aquest cas tenim:

$$\varepsilon_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$

que substituint-ho en l'equació anterior:

$$\rho_i \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} = E_1 \frac{d}{dt} \left[\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \right] + E \left[\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \right]$$

Si prenem el límit del model diferencial considerant infinits sistemes de Kelvin-Voigt, el que fem és passar de sistema discret a continu fent que $h \rightarrow 0$, de manera que el límit del quocient en diferències finites no és res més que la versió discreta de la segona derivada espacial del desplaçament:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = (u_i)_{xx}$$

quedant l'equació del desplaçament en el punt i -èssim:

$$\rho_i (u_i)_{tt} = E_1 (u_i)_{xxt} + E (u_i)_{xx}$$

i, per tant, en qualsevol punt interior del sistema tenim:

$$\rho(x) u_{tt}(x, t) = E_1 u_{xxt}(x, t) + E u_{xx}(x, t) \quad (1.13)$$

Observem que, de fet, es tracta de la nostra equació abans d'adimensionalitzar (veure equació 1.4), cosa que ens dóna ja una idea de com discretitzar el nostre sistema molla-massa.

4. Equació d'ones amb dissipació feble o Maxwell continu.

L'equació d'ones amb dissipació feble, molt més estudiada que la dissipació forta, també es pot deduir utilitzant la teoria de models reològics.

Pensem-ho com un material que, a nivell diferencial, es pot escriure com una successió de sistemes de Maxwell connectats entre ells en sèrie (altre cop pensem un medi continu com a límit d'aquest sistema discret)

En cadascun dels sistemes tenim, de l'equació de Maxwell (veure equació 1.12), que podem escriure com:

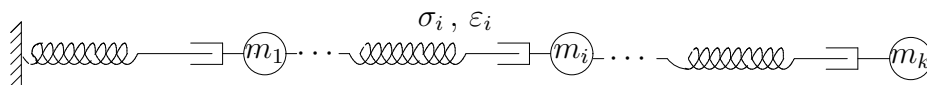


Figura 1.7: Model de Maxwell continu

$$\sigma_i = E_1 \left(\dot{\epsilon}_i - \frac{\dot{\sigma}_i}{E} \right)$$

També fent balanç de forces en una massa m_i qualsevol, tenim que la força total aplicada a m_i és, com abans:

$$m_i \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} = \sigma_{i+1} - \sigma_i$$

d'on, substituint les tensions per la seva expressió anterior, tenim:

$$\begin{aligned} \rho_i h \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} &= E_1 (\dot{\epsilon}_{i+1} - \dot{\epsilon}_i) - \frac{E_1}{E} (\dot{\sigma}_{i+1} - \dot{\sigma}_i) \\ &= E_1 (\dot{\epsilon}_{i+1} - \dot{\epsilon}_i) - \frac{E_1}{E} (m_i \frac{d^2}{dt^2} u_i(t)) \\ &= E_1 (\dot{\epsilon}_{i+1} - \dot{\epsilon}_i) - \frac{E_1 \rho_i h}{E} (u_i)_{ttt} \end{aligned}$$

Escrivint la deformació en termes del desplaçament, tenim:

$$\rho_i h (u_i)_{tt} = E_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h} \right) - \frac{E_1 h \rho_i}{E} (u_i)_{ttt}$$

Dividint per h i prenent límits per $h \rightarrow 0$ tenim:

$$\rho_i u_{tt} = E_1 \frac{d}{dt} (u_i)_{xx} - \frac{E_1 \rho_i}{E} (u_i)_{ttt}$$

de manera que l'equació del moviment en un punt qualsevol del sistema:

$$\rho(x) u_{tt} = E_1 u_{xxt} - \frac{E_1 \rho(x)}{E} u_{ttt}$$

Si volem, integrant respecte t a banda i banda el que tenim és:

$$\frac{E_1}{E} u_{tt} = \frac{E_1}{\rho(x)} u_{xx} - u_t + F(x)$$

amb $F(x)$ qualsevol, que podem suposar, sense pèrdua de generalitat, igual a zero (veure [D], cap.6). Tenim, doncs, deduïda l'equació d'ones amb dissipació feble:

$$\frac{E_1}{E} u_{tt} = \frac{E_1}{\rho(x)} u_{xx} - u_t \quad (1.14)$$

5. Equació d'ones amb dissipació forta i condicions de contorn dinàmiques: el nostre cas.

Ja hem vist que l'equació amb dimensions del desplaçament en un punt interior del nostre sistema molla-massa és la mateixa que la del medi Kelvin-Voigt continu, que ens representa la discretització de la molla com a sistema viscoelàstic. Però ens falten les condicions de contorn. Pensem doncs en un material tal que, a nivell diferencial, es pugui pensar en l'interior com una successió en sèrie de sistemes de Kelvin-Voigt, l'últim dels quals està acoblat en paral·lel amb un amortidor, tal i com indica la figura 1.8. El sistema està connectat a una massa en aquest extrem (la roda), que no té deformacions internes.

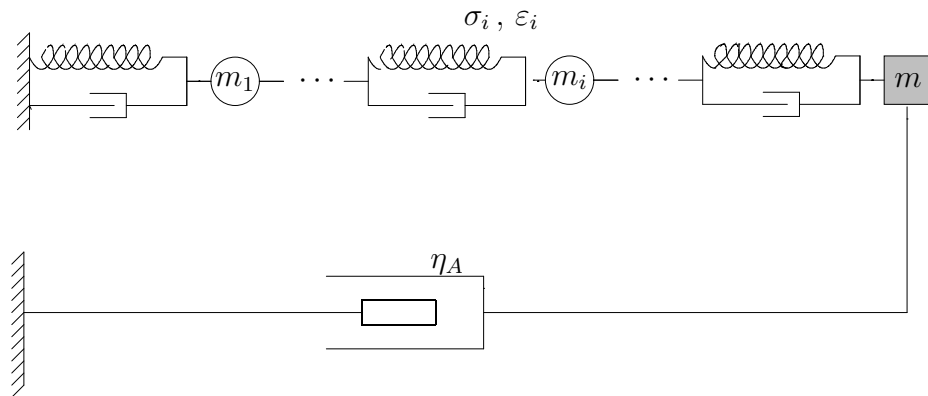


Figura 1.8: Model diferencial del nostre sistema molla-massa

Aquest sistema té com a equació del moviment en qualsevol punt interior l'equació 1.13, i com a condició de contorn en $x = 0$, la Dirichlet homogènia. Falta la condició en $x = L$, en la qual només intervenen l'últim dels sistemes Kelvin-Voigt i l'amortidor (l'acció de la resta de la molla hi és present a través d'aquest últim sistema KV, ja que estan connectats en sèrie entre ells).

Per a fixar els termes, anomenarem σ_i i ε_i la tensió i la deformació en l'última component de KV, que tindrà llargada h . Com que, de fet, σ_i és la tensió total de la molla (connexió en sèrie), l'anomenarem σ_M ; per contra, la tensió i deformació en l'amortidor seran, respectivament, σ_A i ε_A . El sistema, de llargada total L està connectat en aquest extrem a una massa m .

L'equació en la component KV és:

$$\sigma_M = E \varepsilon_i + E_1 \dot{\varepsilon}_i$$

i la de l'amortidor:

$$\sigma_A = \eta_A \dot{\varepsilon}_A$$

Com que la connexió entre ells és en paral·lel, tenim que les tensions se sumen:

$$\sigma_A + \sigma_M = \sigma$$

I les deformacions les podem escriure en termes del desplaçament, com en els casos anteriors, però ara ε_i i ε_A són deformacions qualitativament diferents. Per una banda, ε_i és la deformació relativa a nivell diferencial del sistema i -èssim (variació de desplaçament partit per longitud del sistema) i, per tant:

$$\varepsilon_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$

Però ε_A és la deformació relativa de l'amortidor: com que té una sola component, la variació del desplaçament és, en aquest cas, el desplaçament en $x = L$ menys el desplaçament en $x = 0$, que és nul:

$$\varepsilon_A = \frac{u(L)}{L}$$

Per tant, en termes de $u(x, t)$, les condicions de contorn queden:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_A + \sigma_M \\ &= \eta_A \frac{d}{dt} \left(\frac{u(L)}{L} \right) + E \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + E_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) \end{aligned}$$

Com que tenim la massa a l'extrem,

$$\sigma = -m u_{tt}$$

tenim

$$m u_{tt}|_L = - \left[E \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + \frac{\eta_A}{L} u_t + E_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) \right] \Big|_L$$

Prenent límits per a $h \rightarrow 0$ (passem al medi continu), tenim la versió discreta de la primera derivada espacial:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) \Big|_L = u_x(L)$$

Així, la condició de contorn queda:

$$m u_{tt}(L, t) = - \left(E u_x + \frac{\eta_A}{L} u_t + E_1 u_{xt} \right) (L, t) \quad (1.15)$$

on $\frac{\eta_A}{L}$ és el coeficient de viscositat de l'amortidor, és a dir, el que nosaltres en la condició de contorn dimensional 1.6 en dèiem q . De fet, observem que amb aquesta notació, hem obtingut exactament la condició 1.6.

6. Generalització del cas anterior: la viscositat i l'elasticitat depenen del punt.

En aquest cas, tindrem una viscositat $(E_1)_i$ i una elasticitat E_i dependents del sistema on ens trobem: així, la discretització també s'haurà de fer en aquests coeficients. L'equació en la component de Kelvin-Voigt i -èssima és:

$$\sigma_i = E_i \varepsilon_i + (E_1)_i \dot{\varepsilon}_i$$

Per tant, després d'aplicar el balanç de forces de sempre entre el sistema i -èssim i el $(i+1)$ -èssim, tenim:

$$\rho_i h \frac{d^2 u_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left((E_1)_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - (E_1)_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) + E_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - E_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$

Observem les següents aproximacions discretes, per diferències endavant dos cops:

$$\begin{aligned} (E_1(x) u_x)_x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(E_1)_{i+1} (u_x)_{i+1} - (E_1)_i (u_x)_i}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(E_1)_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - (E_1)_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h}}{h} \end{aligned}$$

Per tant, de fet el que teníem si fem límits per $h \rightarrow 0$ és:

$$\rho(x) u_{tt} = (E_1(x) u_x)_{xt} + (E(x) u_x)$$

que desenvolupada és la nostra, però amb dos termes afegits:

$$\rho(x) u_{tt} = E_1(x) u_{xxt} + (E_1)_x(x) u_{xt} + E(x) u_{xx} + E_x(x) u_x$$

1.3 Valors propis dominants i reducció a equacions diferencials ordinàries.

Considerem l'equació d'evolució

$$\frac{d}{dt} x(t) = B x(t) \quad (1.16)$$

on B és un operador en un espai \mathcal{X} de dimensió infinita amb espectre $\sigma(B)$.

Definició 1 *Suposem que $\sigma(B)$ conté k valors propis aïllats, de multiplicitat algebraica finita, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (repetits segons la multiplicitat) i que existeixen dues constants $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ tals que*

$$\operatorname{Re} \lambda < \omega_2 < \omega_1 < \operatorname{Re} \lambda_i \quad \forall i = 1, \dots, k, \quad \forall \lambda \in \sigma(B) \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$$

*En aquest cas direm que l'operador B admet un subconjunt finit de **valors propis dominants** $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.*

Quan tenim aquesta situació, podem separar l'espectre en dues parts σ_1 i σ_2 (en l'apartat 3.2 tractarem aquest tema amb més detall), on $\sigma_1 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ i $\sigma_2 = \sigma(B) \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, de manera que $\sigma(B) = \sigma_1 \cup \sigma_2$. A aquesta descomposició de l'espectre va associada una descomposició de l'espai total \mathcal{X} :

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$$

essent l'operador B invariant sobre cada subespai. Així, l'operador B restringit al subespai \mathcal{X}_1 , que denotem per $B_1 = B|_{\mathcal{X}_1}$, és un operador de dimensió finita; i $B_2 = B|_{\mathcal{X}_2}$, la restricció de B al subespai \mathcal{X}_2 , és de dimensió infinita. I els espectres són $\sigma(B_1) = \sigma_1$ i $\sigma(B_2) = \sigma_2$.

Així, tota solució de 1.16 es pot escriure com:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

on $x_1(t) \in \mathcal{X}_1$ i $x_2(t) \in \mathcal{X}_2$. De fet, si ens mirem les equacions d'evolució donades pels operadors projectats B_1 i B_2 tenim, per una banda, que $x_1(t)$ és solució de:

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = B_1 x_1(t) \quad (1.17)$$

que, com que B_1 és de dimensió finita, és una equació diferencial ordinària de solució $x_1(t) = e^{tB_1} x_1(0)$. Per l'altra banda, l'operador de dimensió infinita ens dóna l'equació d'evolució:

$$\frac{d}{dt} x_2(t) = B_2 x_2(t) \quad (1.18)$$

que té per solució $x_2(t) = e^{tB_2} x_2(0)$.

Suposem a més que l'operador B és *generador infinitesimal d'un semigrup analític*. En aquest cas, també ho serà l'operador B_2 , de manera que podem acotar les solucions de la manera següent:

$$\|x_1(t)\| = \|e^{tB_1} x_1(0)\| \geq M_1 e^{\omega_1 t} \|x_1(0)\|, \quad t \geq 0 \quad (1.19)$$

ja que B_1 és de dimensió finita i $Re \lambda > \omega_1 \quad \forall \lambda \in \sigma_1$, i:

$$\|x_2(t)\| = \|e^{tB_2} x_2(0)\| \leq M_2 e^{\omega_2 t} \|x_2(0)\|, \quad t \geq 0 \quad (1.20)$$

ja que B_2 genera un semigrup analític i $Re \lambda < \omega_2 \quad \forall \lambda \in \sigma_2$.

Teorema 2 *Suposem que B és un operador de dimensió infinita, que genera un semigrup analític i que admet un subconjunt finit de valors propis dominants. Sigui $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ solució de l'equació d'evolució 1.16, amb $x_1(t) \in \mathcal{X}_1$ i $x_2(t) \in \mathcal{X}_2$, amb condicions inicials $x(0) = x_1(0) + x_2(0)$ i $x_1(0) \neq 0$. Llavors, es compleix que:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|x(t) - x_1(t)\|}{\|x(t)\|} = 0$$

Observació 3 *En aquest cas, és raonable dir que l'equació d'evolució de dimensió infinita $x' = Bx$ té com a **límit** quan $t \rightarrow \infty$ l'equació diferencial ordinària $x'_1 = B_1 x_1$.*

Demostració. Observem abans de res que, degut a l'equivalència de normes, tenim la relació:

$$C_1 (\|x_1\| + \|x_2\|) \leq \|x\| \leq C_2 (\|x_1\| + \|x_2\|)$$

Així,

$$\frac{\|x(t) - x_1(t)\|}{\|x(t)\|} \leq \frac{\|x_2(t)\|}{C_1 (\|x_1(t)\| + \|x_2(t)\|)} \leq \frac{\|x_2(t)\|}{C_1 \|x_1(t)\|}$$

Per les desigualtats 1.19 i 1.20:

$$\frac{\|x_2(t)\|}{C_1 \|x_1(t)\|} \leq \frac{M_2 e^{\omega_2 t} \|x_2(0)\|}{C_1 M_1 e^{\omega_1 t} \|x_1(0)\|} = \frac{M_2 \|x_2(0)\|}{C_1 M_1 \|x_1(0)\|} e^{(\omega_2 - \omega_1) t}$$

Com que $\omega_2 < \omega_1$, tenim $e^{(\omega_2 - \omega_1) t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$, de manera que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|x(t) - x_1(t)\|}{\|x(t)\|} = 0$$

□

Capítol 2

Molla elàstica perfecta ó $\alpha = 0$

Ens fixarem ara en el cas $\alpha = 0$, és a dir, considerarem nul·la la viscositat de la molla (no tindrà dissipació interna). Es tracta doncs de l'estudi de l'equació:

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad t > 0 \\ u_{tt}(1, t) + \varepsilon u_x(1, t) + \varepsilon r u_t(1, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1 \\ u_t(x, 0) = v_0(x), \quad 0 < x < 1 \\ u(1, 0) = \eta (= u_0(1)) \\ u_t(1, 0) = \mu (= v_0(1)) \end{array} \right.$$

on hem afegit ara les condicions inicials i on $u = u(x, t)$, $t \in [0, \infty)$ i els paràmetres adimensionals ε i r són estrictament positius (per tant, sí tindrem dissipació provinent de l'acció de l'amortidor). Volem un marc funcional on plantejar-nos aquesta equació.

2.1 Plantejament funcional.

Definició 4 Sigui $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal no acotat, on \mathcal{H} és un espai de Hilbert. Direm que és un operador **monòton** si

$$\operatorname{Re}(TV, V)_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall V \in \mathcal{D}(T)$$

I serà **maximal monòton** si, a més, $\mathcal{R}(I + T) = \mathcal{H}$ (veure [B], cap. 7).

El que voldrem és escriure l'equació 2.1 com una equació d'evolució del tipus:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}V - AV = 0, & t \in [0, \infty) \\ V(0) = F_0 \end{cases}$$

on l'operador $(-A, \mathcal{D}(A))$ serà maximal monòton (alguns autors parlen de $(A, \mathcal{D}(A))$ operador *dissipatiu*). El teorema de Hille-Yosida (o de Lummer-Phillips, amb l'altra notació (veure [P])) ens garanteix que, sota aquestes hipòtesis, A genera un semigrup continu de contraccions (de fet, tenim una correspondència bijectiva entre els semigrups continus de contraccions i els operadors maximals monòtons ([B])).

Seguint el plantejament de [GR], definirem l'operador de la manera següent. En general, per a :

$$V = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A)$$

definim:

$$AV = \begin{pmatrix} (v, v(1)) \\ (u_{xx}, -\varepsilon u_x(1) - \varepsilon r v(1)) \end{pmatrix}$$

$$V(0) = F_0 = \begin{pmatrix} (u_0(x), \eta) \\ (v_0(x), \mu) \end{pmatrix}$$

Així, per a

$$V = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (u_t, u_t(1)) \end{pmatrix}$$

i l' A i F_0 anteriors, l'equació d'ones inicial es pot escriure com una equació

d'evolució del tipus que volíem. Però cal definir els espais on viuen aquests elements. Per a fer-ho, ens cal primer definir uns espais base, que denotarem per X_0, X_1 i X_2 , on:

$$X_2 = \{(u, \gamma) \in H^2(0, 1) \times \mathbb{C}, u(1) = \gamma, u(0) = 0\}$$

subespai de $H^2(0, 1) \times \mathbb{C}$,

$$X_1 = \{(u, \gamma) \in H^1(0, 1) \times \mathbb{C}, u(1) = \gamma, u(0) = 0\}$$

subespai de $H^1(0, 1) \times \mathbb{C}$,

$$X_0 = \{(u, \gamma) \in L^2(0, 1) \times \mathbb{C}\}$$

és a dir, és exactament $L^2(0, 1) \times \mathbb{C}$. Els dotarem dels productes escalars següents:

$$\langle (u, u(1)), (v, v(1)) \rangle_{X_1} = \int_0^1 u_x \overline{v_x} dx$$

i

$$\langle (u, \gamma), (v, \beta) \rangle_{X_0} = \int_0^1 u \overline{v} dx + \frac{1}{\varepsilon} \gamma \overline{\beta}$$

Observació 5 *Aquests productes escalars són equivalents als habituals dels espais de Sobolev on estan inclosos (veure el lema 6).*

Amb aquestes definicions, els espais naturals on pensar l'operador i el seu domini són:

$$\mathcal{D}(A) = X_2 \times X_1 \subset \mathcal{H}$$

$$\mathcal{H} = X_1 \times X_0$$

i \mathcal{H} és un espai de Hilbert amb el producte escalar:

$$\left\langle \begin{pmatrix} (u_1, u_1(1)) \\ (u_0, \gamma_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (v_1, v_1(1)) \\ (v_0, \beta_0) \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \langle (u_1, u_1(1)), (v_1, v_1(1)) \rangle_{X_1} + \langle (u_0, \gamma_0), (v_0, \beta_0) \rangle_{X_0}$$

Lema 6 *Els productes escalars que hem definit en X_1 i X_0 són equivalents als productes habituals en $H^1 \times \mathbb{C}$ i $L^2 \times \mathbb{C}$, respectivament.*

Demostració. a) Sigui $u \in H^1(0, 1)$, $u(0) = 0$. Vegem que

$$\int_0^1 |u|^2 dx \leq C \int_0^1 |u_x|^2 dx \quad \text{amb } C > 0$$

En particular, en aquest espai, les normes $\|u\|_{H^1}$ i $\|u_x\|_{L^2}$ són equivalents.

Efectivament. Recordem que $\overline{\mathcal{C}^1(0, 1)} = H^1(0, 1) \subset \mathcal{C}[0, 1]$. Podem prendre una successió $\tilde{u}_n \in \mathcal{C}^1(0, 1)$ que approximi $u \in H^1(0, 1)$, $u(0) = 0$. En particular, si T és l'operador traça, tenim:

$$\|T\tilde{u}_n - Tu\|_{L^1(\partial[0,1])} \leq \|\tilde{u}_n - u\|_{H^1} \rightarrow 0$$

d'on $\tilde{u}_n(0) \rightarrow 0$. Prenem ara $u_n(x) = \tilde{u}_n(x) - \tilde{u}_n(0)$. Tenim $u_n \in \mathcal{C}^1(0, 1)$ i $u_n(0) = 0$ i, com que $\tilde{u}_n(0) \rightarrow 0$, també és cert que $u_n(x)$ approximen u en $H^1(0, 1)$. Per a aquestes funcions podem escriure:

$$u_n(x) = \int_0^x u'_n(\xi) d\xi$$

d'on tenim que $\|u_n\|_{L^2} \leq \|u'_n\|_{L^2}$ i, en particular, es compleix l'enunciat per a aquestes funcions:

$$\|u_n\|_{L^2} \leq \|u'_n\|_{L^2}, \quad \forall u_n \in \mathcal{C}^1(0, 1), u_n(0) = 0$$

i, per tant:

$$\|u_n\|_{H^1} \leq C \|u'_n\|_{L^2}, \quad \forall u_n \in \mathcal{C}^1(0, 1), u_n(0) = 0$$

Utilitzant aquesta acotació, ho veurem per a les funcions que ens interesen, ja que:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1} &\leq \|u_n - u\|_{H^1} + \|u_n\|_{H^1} \\ &\leq \|u_n - u\|_{H^1} + C \|u'_n\|_{L^2} \leq \|u_n - u\|_{H^1} + C \|u'_n - u'\|_{L^2} + C \|u'\|_{L^2} \end{aligned}$$

Prenent límits per $n \rightarrow \infty$, tenim ja que:

$$\|u\|_{H^1} \leq C \|u'\|_{L^2}$$

b) Per tant, el producte escalar habitual de $H^1 \times \mathbb{C}$:

$$\langle (u, u(1)), (v, v(1)) \rangle_{H^1 \times \mathbb{C}} = \int_0^1 (u \bar{v} + u_x \bar{v}_x) dx + u(1) \overline{v(1)}$$

és equivalent a:

$$\langle (u, u(1)), (v, v(1)) \rangle = \int_0^1 u_x \bar{v}_x dx + u(1) \overline{v(1)}$$

quan $u(0) = v(0) = 0$. Ens queda veure l'equivalència amb el producte escalar a X_1 . Però,

$$\int_0^1 |u_x|^2 \leq \int_0^1 |u_x|^2 + |u(1)|^2$$

Tornant a usar aproximacions tipus $u_n(x)$ s'obté que $|u(1)| \leq \left(\int_0^1 |u_x|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, d'on

$$\int_0^1 |u_x|^2 + |u(1)|^2 \leq K \int_0^1 |u_x|^2$$

c) Comprovar que la norma a X_0 equival a la de $L^2 \times \mathbb{C}$ és directe per $\varepsilon > 0$. \square

Teorema 7 *L'operador $(-A, \mathcal{D}(A))$ és maximal monòton.*

Demostració.

a) Vegem primer que $-A$ és monòton, és a dir, que:

$$\operatorname{Re} \langle -AV, V \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall V = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A)$$

Només escrivint qui és l'operador i integrant per parts tenim:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \langle -AV, V \rangle_{\mathcal{H}} = \\ & = \operatorname{Re} [\langle (-v, -v(1)), (u, u(1)) \rangle_{X_1} + \langle (-u_{xx}, \varepsilon u_x(1) + \varepsilon r v(1)), (v, v(1)) \rangle_{X_0}] = \\ & = \operatorname{Re} \left[\int_0^1 -v_x \bar{u}_x dx + \int_0^1 -u_{xx} \bar{v} dx + \frac{1}{\varepsilon} (\varepsilon u_x(1) \overline{v(1)} + \varepsilon r |v(1)|^2) \right] = \\ & \quad = r |v(1)|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

d'on tenim que, efectivament, $-A$ és monòton.

b) Ens falta veure que $-A$ és maximal monòton, és a dir, que també es compleix que $\mathcal{R}(-A + Id) = \mathcal{H}$ o, en altres termes, que

$$\forall F = \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} \in \mathcal{H}, \exists V = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A)$$

tal que

$$V - AV = F$$

Si ho escrivim, tenim que s'ha de complir que:

$$\begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-v, -v(1)) \\ (-u_{xx}, \varepsilon u_x(1) + \varepsilon r v(1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix}$$

Igualant terme a terme, es tracta de trobar $u \in H^2(0, 1)$ i $v \in H^1(0, 1)$ tals que:

$$\begin{cases} u - v = f \\ v - u_{xx} = g \\ v(1) + \varepsilon u_x(1) + \varepsilon r v(1) = b \end{cases}$$

amb $u(0) = 0$ i $v(0) = 0$, i amb $f \in H^1(0, 1)$, $g \in L^2(0, 1)$ i $b \in \mathbb{C}$ donades. Usant la primera relació, expressarem l'anterior sistema en termes d'una sola variable:

$$v = u - f \Rightarrow \begin{cases} -u_{xx} + u = g + f \\ \varepsilon u_x(1) + (\varepsilon r + 1) u(1) = b + (\varepsilon r + 1) f(1) \end{cases}$$

on $u \in H^2(0, 1)$ i $u(0) = 0$. Simplifiquem la notació d'aquesta equació diferencial de segon ordre en u i denotem:

$$\begin{aligned} h &= g + f \in L^2 \\ m &= \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon r} \\ s &= \frac{b}{1 + \varepsilon r} + f(1) \end{aligned}$$

de manera que l'e.d.o. queda:

$$\begin{cases} -u_{xx} + u = h \\ mu_x(1) + u(1) = s \end{cases}$$

Amb aquest canvi de notació i fent encara un altre canvi de variable que és $w = u - \frac{s}{m+1}x$, l'equació que, finalment, resoldrem és:

$$(2.3) \quad \begin{cases} -w_{xx} + w = \tilde{h} \\ w(0) = 0 \\ m w_x(1) + w(1) = 0 \end{cases}$$

on $\tilde{h} = h - \frac{s}{m+1}x \in L^2$ i amb $w \in H^2$. Escrivint l'equació en aquesta forma, resulta directe veure, aplicant teorema de Lax-Milgram, que 2.3 té solució i és única. Amb això tenim ja demostrat que $-A$ és maximal i monòton. \square

Observació 8 *El teorema de Hille-Yosida (veure el capítol VIII de [B]) ens diu que $-A$ genera un semigrup continu de contraccions en \mathcal{H} . En particular, per a tota condició inicial $F_0 \in \mathcal{D}(A)$ tenim existència i unicitat de solució per al problema:*

$$\frac{d}{dt}V - AV = 0$$

amb $V(0) = F_0$. Aquesta solució V és $\mathcal{C}^1((0, \infty); \mathcal{H})$ i $\mathcal{C}^0((0, \infty); \mathcal{D}(A))$. A més, el teorema també ens acota en norma les solucions i tenim:

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|V(0)\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall t \geq 0$$

i

$$\left\| \frac{d}{dt}V(t) \right\|_{\mathcal{H}} = \|AV(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|AV(0)\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall t \geq 0$$

Aquest tipus d'acotacions ens seran útils en algun moment.

2.2 Estudi qualitatiu de les solucions.

Mitjançant l'estudi dels **valors propis** i les **funcions pròpies** de l'operador $(A, \mathcal{D}(A))$, veurem que quan $\alpha = 0$ no podrem parlar d'un conjunt finit dominant de valors propis. En particular, quan la molla és elàstica perfecta l'equació en derivades parcials no es comportarà, en el límit, com una equació diferencial ordinària. Però tot i això, l'estudi ens permetrà veure que, en aquest cas, totes les solucions de l'equació tendiran a zero quan el temps es fa infinit (perquè la part real dels valors propis serà sempre estrictament negativa) i que hi haurà solucions que aniran a zero tan lentament com vulguem.

Voldrem estudiar solucions del tipus

$$u(x, t) = e^{\lambda t} u(x) \quad (2.4)$$

és a dir, ens interessem pels valors propis i les funcions pròpies de l'operador A . Veurem que les combinacions lineals de solucions del tipus 2.4 són denses en \mathcal{H} i quines conseqüències té tot això.

2.2.1 El conjunt de funcions pròpies de A és complet en \mathcal{H} .

Ho veurem seguint la teoria d'operadors completament continus de [G-K], cap.V.10. Abans d'aplicar el resultat de densitat d'aquests autors, cal definir alguns conceptes que apareixen en aquest llibre.

Observació 9 *Dir que un operador A és compacte equival a dir que és **completament continu** (ho denotem per $A \in \Sigma_\infty$).*

Definició 10 *Sigui $A \in \Sigma_\infty$. Anomenem **s-nombres** de l'operador A als valors propis de l'operador $H = (A^* A)^{\frac{1}{2}} \in \Sigma_\infty$, que numerarem en ordre decreixent tenint en compte la multiplicitat:*

$$s_j(A) = \lambda_j(H), \quad (j = 1, 2, \dots, r(H) = \dim \mathcal{R}(H))$$

Aquests s-nombres tenen un conjunt de propietats en les que no entrarem (veure [G-K]).

Definició 11 Denotem per Σ_p el següent subespai d'operadors completament continus

$$\Sigma_p = \{A \in \Sigma_\infty \text{ t.q. } \sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) < \infty\}$$

Teorema 12 (Gohberg, Krejn [G-K]) El conjunt de funcions pròpies de l'operador $\tilde{A} = \tilde{T} + \tilde{K}$ és complet en \mathcal{H} sempre que \tilde{T} sigui autoadjunt i amb espectre discret i \tilde{K} pertanyi a algun Σ_p .

El que farem és demostrar que un cert operador \tilde{A} , que no serà exactament A però gairebé, està dins les hipòtesis d'aquest teorema. L'operador que considerarem serà un gir de l'anterior, concretament $\tilde{A} = iA$, de manera que:

$$\tilde{A}V = \tilde{A} \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (iv, iv(1)) \\ (iu_{xx}, -i\varepsilon u_x(1) - i\varepsilon r v(1)) \end{pmatrix}$$

Teorema 13 El sistema de funcions pròpies de l'operador \tilde{A} és complet en \mathcal{H} .

Demostració.

Aquest nou operador és convenient descomposar-lo com $\tilde{A}V = \tilde{T}V + \tilde{K}V$ on:

$$\tilde{T} \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (iv, iv(1)) \\ (iu_{xx}, -i\varepsilon u_x(1)) \end{pmatrix}$$

representaria l'operador *derivades*, i:

$$\tilde{K} \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 0) \\ (0, -i\varepsilon r v(1)) \end{pmatrix}$$

seria l'operador de *constants*. Només cal veure que, amb aquesta descomposició, estem dins les hipòtesis del teorema de Gohberg i Krejn.

1. \tilde{T} és autoadjunt.

Hem de veure que

$$\langle \tilde{T}V, W \rangle_{\mathcal{H}} = \langle V, \tilde{T}W \rangle_{\mathcal{H}}$$

per a qualssevol $V = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} (w, w(1)) \\ (z, z(1)) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$

Comprovar la simetria d'aquest producte escalar és integrar per parts.

2. $\sigma(\tilde{T})$ és discret.

La idea és que trobarem \tilde{T}^{-1} , operador acotat de \mathcal{H} en \mathcal{H} i veurem que és compacte. Com que coneixem l'estructura dels valors propis d'un operador compacte i els valors propis de \tilde{T} són els inversos dels valors propis de \tilde{T}^{-1} , aquesta estructura es mantindrà.

Comencem trobant l'invers de \tilde{T} . Partint de l'expressió de \tilde{T} ,

$$\tilde{T} \underbrace{\begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{D}(A)} = \underbrace{\begin{pmatrix} (iv, iv(1)) \\ (iu_{xx}, -i\varepsilon u_x(1)) \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{H}}$$

podem invertir formalment l'operador i tenim:

$$\tilde{T}^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} (w, w(1)) \\ (z, \beta) \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{H}} = \underbrace{\begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (-iw, -iw(1)) \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{D}(A)}$$

on ara w , z i β estan donades i u és la solució del problema:

$$(2.5) \quad \begin{cases} u_{xx} = -iz \\ u(0) = 0 \\ -i\varepsilon u_x(1) = \beta \end{cases}$$

Es pot comprovar que $\tilde{T} \circ \tilde{T}^{-1} = Id_{\mathcal{H}}$, $\tilde{T}^{-1} \circ \tilde{T} = Id_{\mathcal{D}(A)}$. I es pot comprovar que l'operador invers està ben definit, és a dir, que el problema 2.5 té solució i que la imatge de l'operador invers està realment en $\mathcal{D}(A)$.

Volem veure que $\tilde{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$: hem de trobar $C > 0$ de manera que

$$\left\| \tilde{T}^{-1} \begin{pmatrix} (w, w(1)) \\ (z, \beta) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}} \leq C \left\| \begin{pmatrix} (w, w(1)) \\ (z, \beta) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}$$

on:

$$\left\| \tilde{T}^{-1} \begin{pmatrix} (w, w(1)) \\ (z, \beta) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}} = \int_0^1 |u_x|^2 dx + \int_0^1 |w|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} |w(1)|^2$$

i

$$\left\| \begin{pmatrix} (w, w(1)) \\ (z, \beta) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}} = \int_0^1 |w_x|^2 dx + \int_0^1 |z|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} |\beta|^2$$

Per a veure-ho, farem una sèrie d'acotacions independents: acotarem cadascun dels tres termes de l'esquerra per algun dels termes de la dreta.

(a) u verifica 2.5, de manera que:

$$\int_0^1 u_{xx} u = \int_0^1 -i z u$$

i, d'altra banda, si integrem per part la mateixa expressió tenim:

$$\int_0^1 u_{xx} u = - \int_0^1 u_x^2 + \frac{i\beta}{\varepsilon} u(1)$$

Ajuntant les dues coses i prenent valors absoluts, tenim:

$$\int_0^1 |u_x|^2 \leq \frac{|\beta|}{\varepsilon} |u(1)| + \int_0^1 |z u| \quad (2.6)$$

Si ens mirem l'últim terme de 2.6, podem acotar-lo per:

$$\int_0^1 |z u| \leq \int_0^1 \frac{1}{2} \left(c^2 |z|^2 + \frac{1}{c^2} |u|^2 \right)$$

on c , de moment, és qualsevol real. Tornant a 2.6, tenim:

$$\int_0^1 |u_x|^2 \leq \frac{|\beta|}{\varepsilon} |u(1)| + \frac{c^2}{2} \int_0^1 |z|^2 + \frac{1}{2c^2} \int_0^1 |u|^2$$

Però $u \in H^1$ i $u(0) = 0$, de manera que, pel lema 6 existeix $M > 0$ que compleix $\int_0^1 |u|^2 \leq M \int_0^1 |u_x|^2$. Utilitzant aquest resultat, es té que:

$$\left(1 - \frac{M}{2c^2}\right) \int_0^1 |u_x|^2 \leq \frac{|\beta|}{\varepsilon} |u(1)| + \frac{c^2}{2} \int_0^1 |z|^2$$

Escollim c de manera que $\left(1 - \frac{M}{2c^2}\right) \geq 0$, com per exemple $1 - \frac{M}{2c^2} = \frac{1}{2}$. Així:

$$\int_0^1 |u_x|^2 \leq \frac{2|\beta|}{\varepsilon} |u(1)| + M \int_0^1 |z|^2 \quad (2.7)$$

Aquesta mateixa idea l'aplicarem per a acotar $|u(1)|$, que és el que encara ens molesta en la desigualtat. Com que $u(0) = 0$ tenim:

$$|u(1)| = \left| \int_0^1 u_x \right| \leq \int_0^1 1 \cdot |u_x| \leq \int_0^1 \frac{d^2}{2} + \int_0^1 \frac{1}{2d^2} |u_x|^2$$

on d s'haurà de determinar. Substituint-ho en 2.7 i triant d tal que $\left(1 - \frac{|\beta|}{\varepsilon d^2}\right) \geq 0$ (per exemple, $d^2 = \frac{2|\beta|}{\varepsilon}$) tenim que:

$$\int_0^1 |u_x|^2 \leq \left(\frac{2|\beta|}{\varepsilon}\right)^2 + 2M \int_0^1 |z|^2 \quad (2.8)$$

- (b) Acotem ara $\int_0^1 |w|^2$ per algun dels termes de $\left\| \begin{pmatrix} w, & w(1) \\ z, & \beta \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}$. Per exemple, usant altre cop el lema 6:

$$\int_0^1 |w|^2 \leq \tilde{M} \int_0^1 |w_x|^2 \quad (2.9)$$

amb $\tilde{M} > 0$.

- (c) Ens queda per acotar $\frac{1}{\varepsilon} |w(1)|^2$. Però només utilitzant la desigualtat d'Schwartz, tenim:

$$|w(1)|^2 \leq \int_0^1 |w_x|^2 \quad (2.10)$$

Per últim, només cal ajuntar les desigualtats 2.8, 2.9 i 2.10 i prendre

$$C = \max\left(\frac{4}{\varepsilon}, 2M, \tilde{M} + \frac{1}{\varepsilon}\right) > 0$$

per a tenir la desigualtat que volíem:

$$\left\| \tilde{T}^{-1} \begin{pmatrix} (w, w(1)) \\ (z, \beta) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}} \leq C \left\| \begin{pmatrix} (w, w(1)) \\ (z, \beta) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}$$

de manera que \tilde{T}^{-1} és un operador acotat en \mathcal{H} .

Vegem ara que \tilde{T}^{-1} és compacte. Sabem que $\tilde{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ i que això equival a que $\tilde{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{D}(A))$. Com que la inclusió de $\mathcal{D}(A)$ en \mathcal{H} és compacta, l'operador:

$$\tilde{T}^{-1} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathcal{H}$$

és un operador compacte.

Sabem que l'invers d'un operador compacte no té espectre essencial i que el seu espectre només consisteix en valors propis aïllats i de multiplicitat algebraica finita (veure el capítol III.6.8 del [K]). Per tant, el conjunt de valors propis de T és discret.

3. $\tilde{K} \in \Sigma_p$ per a algun $p < \infty$.

Teníem l'operador $\tilde{K}V = \tilde{K} \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 0) \\ (0, -i\varepsilon r v(1)) \end{pmatrix}$. Observem que el rang de l'operador és, de fet, \mathbb{C} . En particular, \tilde{K} és un operador de rang finit i, per tant, compacte. De manera que ja es compleix la primera condició: $\tilde{K} \in \Sigma_\infty$.

Per a veure que, a més, pertany a algun Σ_p hem de veure com són els s-nombres de \tilde{K} o, el que és el mateix, els valors propis de l'operador $H = (\tilde{K}^* \tilde{K})^{\frac{1}{2}}$. Ens cal, doncs, l'adjunt de \tilde{K} , que és:

$$\tilde{K}^* \begin{pmatrix} (w, w(1)) \\ (z, z(1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 0) \\ (0, i\varepsilon r z(1)) \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$H = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 0) \\ (0, \varepsilon r v(1)) \end{pmatrix}$$

Altre cop ens trobem amb un operador amb rang isomorf a \mathbb{C} . En particular, aquest operador H tindrà un sol valor propi, de manera que

\tilde{K} té un únic s-nombre $s_1(\tilde{K}) = \|\tilde{K}\|$ (propietats dels s-nombres, veure [G-K]). Per tant,

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(\tilde{K}) = \|\tilde{K}\|^p < \infty \quad \forall p < \infty$$

de manera que $\tilde{K} \in \Sigma_p \quad \forall p < \infty$, que és el que volíem demostrar.

Conclusió: Amb a), b), i c) hem vist que es compleixen totes les hipòtesis del teorema de Gohberg i Krejn per a l'operador \tilde{A} : el conjunt de funcions pròpies de \tilde{A} és complet en \mathcal{H} i, per tant, també ho és el de l'operador $A = i\tilde{A}$.

□

2.2.2 Valors propis i comportament asimptòtic de les solucions.

Una primera conseqüència immediata de la completitud del conjunt de funcions pròpies de A en \mathcal{H} és el nombre de valors propis de A .

Lema 14 *L'operador $(A, \mathcal{D}(A))$ té infinits valors propis. A més, ni ells ni cap parcial no s'acumulen en cap punt finit.*

Demostració. La idea és anàloga al treball per a veure l'estructura dels valors propis de \tilde{T} , en la demostració del teorema 13: veurem que A és invertible i que l'operador invers és compacte, de manera que els valors propis de A , igual que els de A^{-1} tindran multiplicitat algebraica finita. Però com que les funcions pròpies són completes en \mathcal{H} , espai de dimensió infinita, l'única manera que les dues coses siguin possibles (valors propis amb multiplicitat algebraica finita en un espai de dimensió infinita on les funcions pròpies hi són denses) és tenir un nombre infinit de valors propis.

Vegem qui és A^{-1} . Si recordem la definició de A , podem invertir formalment l'operador, obtenint:

$$A^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} (w, w(1)) \\ (z, \beta) \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{H}} = \underbrace{\begin{pmatrix} (-u, -u(1)) \\ (w, w(1)) \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{D}(A)}$$

on w , z i β estan donades i u és la solució del problema:

$$(2.11) \quad \begin{cases} u_{xx} = -z \\ u(0) = 0 \\ \varepsilon u_x(1) = \beta + \varepsilon r w(1) \end{cases}$$

Aquest problema és pràcticament el 2.5, que tenia solució a l'espai on volíem. Així que A és invertible. Treballant de manera anàloga a \tilde{T}^{-1} , podem veure que és un operador acotat de $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ i, per les inclusions entre els espais de Sobolev, és compacte (veure demostració del teorema 13).

Com que tenim infinits valors propis in ho són d'un operador compacte, tenim $\sigma_p(A^{-1}) \rightarrow 0$ i, per tant, $\sigma_p(A) \rightarrow \infty$, amb el que es demostra que els valors propis de A no s'acumulen en cap punt finit.

□

Vegem, però, com són aquests infinits valors propis i com influeixen en el comportament asimptòtic de les solucions.

Lema 15 *Els valors propis de $(A, \mathcal{D}(A))$ tenen part real estrictament negativa. De fet, existeix $C > 0$ tal que $-C < \operatorname{Re} \lambda < 0 \forall \lambda$ valor propi. A més, els valors propis s'acumulen en la recta $\operatorname{Re} \lambda = 0$*

Demostració.

1. Considerem l'energia:

$$E(u(x, t)) = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 |u_x|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} |u_t(1)|^2$$

De fet, aquesta energia és un múltiple de la norma en \mathcal{H} , però la podem pensar com l'energia total de la molla (els dos primers termes corresponen a energia cinètica més la potencial) i l'energia (cinètica) en la roda, que és l'últim terme.

Si derivem aquesta energia respecte t , i l'avaluem sobre $u(x, t)$ solució de 2.1 tenim que:

$$\frac{dE(u(x, t))}{dt} = -\varepsilon r |u_t(1)|^2 \leq 0$$

on queda demostrat que el sistema és dissipatiu (observem que si $u(x, t)$ és solució de 2.1, $\bar{u}(x, t)$ serà solució del problema conjugat).

D'altra banda, si avaluem l'energia sobre solucions del tipus que busquem (recordem, $u(x, t) = e^{\lambda t} u(x)$) tenim:

$$E(e^{\lambda t} u(x)) = e^{2Re\lambda t} \left(\frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 |u_x|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 |\lambda u|^2 dx + \frac{|\lambda^2|}{2} |u(1)|^2 \right)$$

que, derivat respecte t :

$$\frac{dE(e^{\lambda t} u(x))}{dt} = (2Re\lambda) e^{(2Re\lambda)t} f(x)$$

on

$$f(x) = \left(\frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 |u_x|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 |\lambda u|^2 dx + \frac{|\lambda^2|}{2} |u(1)|^2 \right) \geq 0$$

Però acabem de veure que la variació de l'energia decreix sobre les solucions de 2.1, cosa que forçosament implica que $Re\lambda \leq 0$.

La mateixa demostració ens permet veure que aquesta part real és nul·la únicament si $\lambda = 0$ (perquè cal que $u_t(1) = 0$), que no és valor propi. Per tant, $Re\lambda < 0 \quad \forall \lambda$ valor propi de A .

2. Per a veure que la part real dels valors propis també està acotada inferiorment, continuarem jugant amb l'energia anterior.

Si $R = 2\varepsilon r$, podem escriure la derivada de l'energia com:

$$\begin{aligned} \frac{dE(u(x, t))}{dt} &= -\frac{R}{2} |u_t(1)|^2 \geq \\ -\frac{R}{2} |u_t(1)|^2 - \frac{R\varepsilon}{2} \int_0^1 |u_x|^2 dx - \frac{R\varepsilon}{2} \int_0^1 |u_t|^2 dx &= -RE(u(x, t)) \end{aligned}$$

hem trobat $R > 0$ tal que $\frac{dE(u(x, t))}{dt} \geq -RE(u(x, t))$. D'aquí obtenim una relació entre l'energia d'una solució en qualsevol temps amb la de la solució en temps inicial, ja que, integrant a banda i banda tenim:

$$\ln \frac{E(u(x, t))}{E(u(x, 0))} \geq -Rt$$

d'on,

$$E(u(x, t)) \geq e^{-Rt} E(u(x, 0))$$

que és la relació que estàvem buscant. Escrivint aquesta desigualtat per a solucions de la forma $e^{\lambda t} u(x)$, tenim:

$$e^{2Re(\lambda t)} E(u(x)) \geq e^{-Rt} E(u(x))$$

ja que es pot veure, escrivint cada terme, que $E(e^{\lambda t} u(x)) = e^{2Re(\lambda t)} E(u(x))$. D'aquesta desigualtat, i substituint R pel seu valor, obtenim:

$$Re \lambda \geq -\varepsilon r$$

de manera que si prenem $C > \varepsilon r > 0$ ja tenim una acotació inferior per la part real de qualsevol dels valors propis, tal i com preteníem.

3. Només ens queda veure que els valors propis s'acumulen en la recta $Re \lambda = 0$. Per a veure-ho, substituïrem en l'equació 2.1 solucions del tipus $u(x, t) = e^{\lambda t} u(x)$. Aquesta equació es transforma en el problema següent:

$$\begin{cases} u'' - \lambda^2 u = 0 \\ u(0) = 0 \\ \varepsilon u'(1) + u(1)(\lambda^2 + \varepsilon r \lambda) = 0 \end{cases}$$

on $u = u(x)$. Observem que escrivint el problema d'aquesta forma es veu clarament que $\lambda = 0$ no és un valor propi del nostre operador. Resolent-lo, podem veure que solucions d'aquest tipus tenen la forma

$$u(x, t) = e^{\lambda t} u(x)$$

on:

$$u(x) = e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}$$

i on λ valor propi verifica:

$$e^{2\lambda} = \frac{\lambda + \varepsilon r - \varepsilon}{\lambda + \varepsilon r + \varepsilon} \quad (2.12)$$

Amb aquestes solucions tenim la funció pròpia de l'operador A , de valor propi λ_n , que és $U_n = \begin{pmatrix} (u, u_n(1)) \\ (\lambda_n u, \lambda_n u_n(1)) \end{pmatrix}$.

Pensant els valors propis en la seva forma complexa $\lambda_n = a_n + ib_n$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ i substituint-la en 2.12, obtenim el següent sistema:

$$(2.13) \quad \begin{cases} e^{2a_n} \cos(2b_n) = \frac{a_n + \varepsilon r - \varepsilon^2 + b_n^2}{(a_n + \varepsilon r + \varepsilon)^2 + b_n^2} \\ e^{2a_n} \sin(2b_n) = \frac{2\varepsilon b_n}{(a_n + \varepsilon r + \varepsilon)^2 + b_n^2} \end{cases}$$

Hem vist, d'altra banda, que tenim infinits valors propis i que ni ells ni cap parcial no s'acumulen en cap punt finit. Per tant, suposar que les parts reals sí tenen límit finit ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$) automàticament comporta que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm\infty$. És a dir, suposem per uns moments que els valors propis s'acumulen en la recta vertical $Re \lambda = a$. Automàticament i només prenent límits en el sistema 2.13 per $n \rightarrow \infty$ es té que $a = 0$. I això val també per a qualsevol parcial de valors propis tal que les parts real tinguin límit que vulguem prendre.

Però, és cert que les parts reals tenen límit? Suposem que no. Com que si aquest límit existeix ha de ser 0, és el mateix que suposar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. En aquest cas, fixat un $\varepsilon > 0$ existirà una successió parcial $\{a_{n_k}\}$ tal que $-C \leq a_{n_k} \leq -\varepsilon < 0$. Però, fixat ε , aquesta nova successió està acotada: tindrà doncs una nova parcial $\{a_{n_{k_j}}\}$ convergent a $l \in [-C, -\varepsilon]$. Això vol dir que existeix una parcial de valors propis tal que les seves parts reals tenen límit estrictament negatiu, cosa que no pot passar. Per tant, les parts reals dels valors propis sí tenen límit i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = 0$$

□

Observació 16 *Com a exemple il·lustratiu podem veure la figura 2.1, on hi ha dibuixats els primers valors propis, amb els seus conjugats, i s'aprecia clarament el fenomen que acabem de descriure.*

Corol·lari 17 *No existeix un conjunt finit dominant de valors propis.*

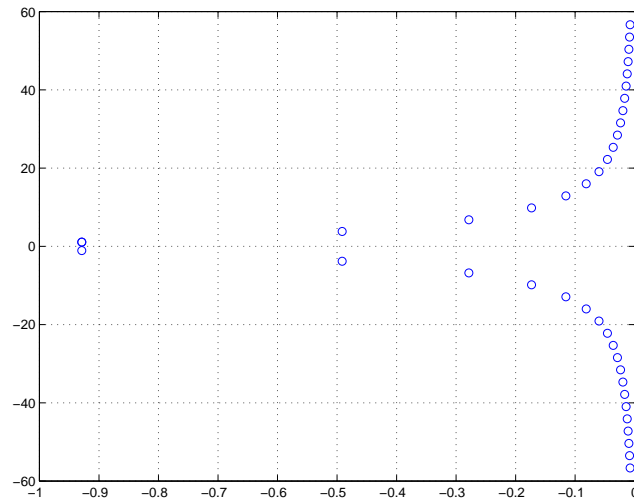


Figura 2.1: $\varepsilon = 5$ i $r = 1$: gràfica dels 20 primers valors propis.

Demostració. Com que hi ha infinits valors propis i s'acumulen en $Re\lambda = 0$ i sabem que $\lambda = 0$ no és valor propi de l'operador A , no podem tenir un subconjunt finit de valors propis dominants. \square

Observació 18 *En particular, l'equació en derivades parcials no té com a límit una equació diferencial quan la molla és purament elàstica.*

Teorema 19 (comportament asimptòtic de les solucions) *Totes les solucions tendeixen a zero quan $t \rightarrow \infty$, però existeixen solucions que hi tendeixen tan a poc a poc com vulguem.*

Demostració.

Hem vist que el conjunt de funcions pròpies $\{U_n(x)\}$ és complet en \mathcal{H} , on

$$U_n = \begin{pmatrix} (u_n, u_n(1)) \\ (\lambda_n u_n, \lambda_n u_n(1)) \end{pmatrix}$$

Això vol dir que per un $\delta > 0$ qualsevol, si prenem una condició inicial en el domini, $V(0) \in \mathcal{D}(A)$, existirà una combinació lineal finita d'aquestes funcions a distància menor que δ de la condició inicial, és a dir:

$$\left\| V(0) - \sum_0^N c_n U_n \right\|_{\mathcal{H}} \leq \delta$$

Sigui $R_0 = V(0) - \sum_0^N c_n U_n$. Òbviament, $\|R_0\| \leq \delta$. Si prenem cadascuna d'aquestes tres quantitats com a condició inicial, tenim com unes solucions associades: sigui $V(t)$ la solució amb condició inicial $V(0)$, $R(t)$ la de condició inicial R_0 i és fàcil veure que $\sum_0^N c_n e^{\lambda_n t} U_n$ és la solució associada a la condició inicial $\sum_0^N c_n U_n$. Per la linealitat de l'operador, tenim:

$$V(t) - \sum_0^N c_n e^{\lambda_n t} U_n = R(t)$$

És evident, doncs, que:

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \left\| \sum_0^N c_n e^{\lambda_n t} U_n \right\|_{\mathcal{H}} + \|R(t)\|_{\mathcal{H}}$$

Però havíem vist que la norma de la solució esta acotada per la norma de la condició inicial, per a tot $t > 0$ (era conseqüència del teorema de Hille-Yosida). En el nostre cas, $\|R(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|R_0\|_{\mathcal{H}} \leq \delta$.

A més, com que els valors propis tenen part real estrictament negativa, tenim:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=0}^N c_n e^{\lambda_n t} U_n(x) \right\| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N |c_n| e^{2(\operatorname{Re} \lambda_n) t} \|U_n(x)\| = 0$$

Ajuntant aquests dos fets, tenim $\lim_{t \rightarrow \infty} \|V(t)\| = 0$.

És a dir, tot i no tenir dissipació interna en la molla, les solucions es dissipen amb el temps, gràcies a l'acció de l'amortidor. És realment per l'amortidor? Efectivament, perquè el que fa dissipar les solucions és el fet que els valors propis tinguin part real estrictament negativa. I, si repassem les demostracions, veurem que això és degut al fet que $\operatorname{Re} \lambda = -\varepsilon r |u_t(1)|^2$, on r és la constant dissipativa de l'amortidor.

Però en què afecta al sistema el fet de tenir una molla sense viscositat interna? Doncs que, tot i que totes les solucions tendiran a zero, n'existiran que hi aniran tan lentament com vulguem. Efectivament: com que les parts reals dels valors propis s'acumulen en $\operatorname{Re} \lambda = 0$, tindrem λ_k valors propis de A amb part real tan propera a zero com vulguem i tots ells amb part real estrictament negativa. Les funcions pròpies (en particular, solucions del model) associades a aquests valors propis:

$$U_k(x, t) = e^{\lambda_k t} U_k(x)$$

van a zero amb una velocitat marcada per la part real de λ_k , de manera que seran solucions que aniran més lentament a zero com més pròxims a l'eix d'ordenades escollim aquests λ_k . Per tant, una molla sense dissipació interna genera solucions *semi-permanents* que costa dissipar (les corresponents a freqüències altes), mentre que la resta es dissipa ràpidament. \square

Podríem resumir, doncs, que les freqüències altes són controlades per la dissipació de la molla, mentre que de les baixes, en principi, se n'ocupa l'amortidor. Aquesta seria una possible explicació al fet que les petites bandes externes en una carretera són, proporcionalment, molt menys dissipades que alteracions més importants del paviment.

Capítol 3

Molla viscoelàstica ó $\alpha > 0$

Considerem una molla amb dissipació interna controlada pel paràmetre $\alpha > 0$. L'equació a estudiar és:

$$(3.1) \left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - u_{xx} - \alpha u_{txx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad t > 0 \\ u_{tt}(1, t) + \varepsilon u_x(1, t) + \varepsilon \alpha u_{tx}(1, t) + \varepsilon r u_t(1, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1 \\ u_t(x, 0) = v_0(x), \quad 0 < x < 1 \\ u(1, 0) = \eta (= u_0(1)) \\ u_t(1, 0) = \mu (= v_0(1)) \end{array} \right.$$

on $u = u(x, t)$, $t \in [0, \infty)$ i on $\varepsilon, r > 0$. Volem un marc funcional on plantejar-nos aquest problema que sigui coherent amb l'entorn proposat per $\alpha = 0$.

3.1 Plantejament funcional.

Anàlogament al cas de $\alpha = 0$, definirem l'operador $(A_\alpha, \mathcal{D}(A_\alpha))$ de la manera següent:

si

$$V = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A_\alpha)$$

definim:

$$A_\alpha V = \begin{pmatrix} (v, v(1)) \\ ((u + \alpha v)_{xx}, -\varepsilon (u + \alpha v)_x(1) - \varepsilon r v(1)) \end{pmatrix}$$

$$V(0) = F_0 = \begin{pmatrix} (u_0(x), \eta) \\ (v_0(x), \mu) \end{pmatrix}$$

El domini de A_α és l'espai:

$$\mathcal{D}(A_\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in X_1 \times X_1, (u + \alpha v) \in H^2(0, 1) \right\} \subset \mathcal{H}$$

on $\mathcal{H} = X_1 \times X_0$, espais que havíem definit en l'apartat 2.1 del capítol anterior. L'operador A_α actua, doncs, de la manera següent:

$$A_\alpha : \mathcal{D}(A_\alpha) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

Així, per a

$$V = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (u_t, u_t(1)) \end{pmatrix}$$

i l' A_α i F_0 anteriors, l'equació 3.1 es pot escriure com l'equació d'evolució

$$(3.2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} V = A_\alpha V, & t \in [0, \infty) \\ V(0) = F_0 \end{cases}$$

Observació 20 *Observem que aquest operador i aquests espais són coherents amb l'operador i els espais definits pel cas $\alpha = 0$ del capítol anterior. Amb aquesta notació, doncs, l'operador pel cas $\alpha = 0$ passa a ser $(A_0, \mathcal{D}(A_0))$, que és exactament el mateix operador que $(A, \mathcal{D}(A))$ que havíem definit.*

El que volem veure ara és l'existència i unicitat de solucions per aquest operador en termes del semigrup que genera. Per a obtenir aquest resultat, seguirem la demostració que fa Grobbelaar [GR], que de fet segueix el resultat de Massat [M], que reproduïm tot seguit:

Teorema 21 (Massat [M]) *Suposem que L és un operador sectorial en un espai X i que B és l'operador definit per:*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ L & \alpha L \end{pmatrix}$$

amb $\alpha > 0$. Aleshores, B genera un semigrup analític e^{-Bt} en $X^\beta \times X^\sigma$ per $0 \leq \sigma \leq \beta < 1$, on X^β i X^σ són els espais $\mathcal{D}(L^\beta)$ i $\mathcal{D}(L^\sigma)$, respectivament.

Teorema 22 *L'operador $(A_\alpha, \mathcal{D}(A_\alpha))$ és generador infinitesimal d'un semigrup analític en \mathcal{H} .*

Demostració.

La idea de la demostració és veure que $-A_\alpha$ genera aquest tipus de semigrup, descomposant aquest operador com:

$$-A_\alpha V = BV + KV = \begin{pmatrix} (-v, -v(1)) \\ ((-u - \alpha v)_{xx}, \varepsilon(u + \alpha v)_x(1)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (0, 0) \\ (0, \varepsilon r v(1)) \end{pmatrix}$$

Veurem que B està dins les hipòtesis del teorema 21 i, per tant, generarà un semigrup analític. Observem a més que K és un operador acotat, de manera que A_α és, de fet, una pertorbació acotada de B i, per tant, també serà generador infinitesimal d'un semigrup analític. L'únic detall amb el que haurem d'anar amb compte són els espais on aquests semigrups estan definits.

El primer pas és, doncs, posar l'operador B en la forma que el presenta el teorema de Massat. Per a fer-ho, definirem l'operador $(L, \mathcal{D}(L))$ com:

$$L(u, u(1)) = (-u_{xx}, \varepsilon u_x(1))$$

amb

$$\mathcal{D}(L) = X_2 = \{(u, \alpha) \in H^2(0, 1) \times \mathbb{C}, u(1) = \alpha, u(0) = 0\} \subset X_0 = L^2(0, 1) \times \mathbb{C}$$

(recordem que havíem definit aquests espais embrió base en el capítol 2). Amb aquesta notació tenim:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ L & \alpha L \end{pmatrix}$$

Per aplicar el teorema de Massat vegem que L és sectorial en X_0 .

Lema 23 L és sectorial en X_0 .

Demostració. Veurem que és autoadjunt i invertible.

1. L és autoadjunt en X_0 . Mirem-nos la simetria del producte escalar sobre elements del domini, producte que havíem definit en l'apartat 2.1 del capítol anterior:

$$\begin{aligned} \langle L(u, u(1)), (v, v(1)) \rangle_{X_0} &= \\ \langle (-u_{xx}, \varepsilon u_x(1)), (v, v(1)) \rangle_{X_0} &= \int_0^1 -u_{xx} \bar{v} dx + \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon u_x(1) \overline{v(1)} = \int_0^1 u_x \bar{v}_x dx = \\ &= \langle (u, u(1)), L(v, v(1)) \rangle_{X_0} \end{aligned}$$

2. L és invertible.

Definim

$$L^{-1}(f, \beta) = (u, u(1)), \text{ per } (f, \beta) \in X_0$$

amb u solució del problema:

$$(3.3) \quad \begin{cases} -u_{xx} = f \\ u(0) = 0 \\ \varepsilon u_x(1) = \beta \end{cases}$$

que té solució única i amb $(u, u(1)) \in X_2$ (recordem que $\varepsilon > 0$).

Per tant, L és sectorial en $X_0 = L^2 \times \mathbb{C}$.

□

Ara sí podem aplicar el teorema de Massat a B i tenim que B genera un semigrup analític en $X_0^\beta \times X_0^\sigma$ per $0 \leq \sigma \leq \beta < 1$. En particular, B genera un semigrup analític en $X_0^{\frac{1}{2}} \times X_0$ i, per tant, també val per A_α .

L'únic que falta veure és que $X_0^{\frac{1}{2}} = X_1$ (recordem que l'enunciat del teorema era que A_α generava un semigrup analític en $X_1 \times X_0$). Tenim $(L, \mathcal{D}(L))$ amb $L : \mathcal{D}(L) \subset X_0 \longrightarrow X_0$. Per tant, $X_0^{\frac{1}{2}} = \mathcal{D}(L^{\frac{1}{2}})$. Aquest

espai fraccionari és, de fet, la clausura de $\mathcal{D}(L)$ amb la norma de la potència fraccionària de l'operador, $\|L^{\frac{1}{2}}(u, u(1))\|_{X_0}$ (veure [H]). Observem, però, que com que L és autoadjunt, aquesta norma és, de fet, el producte escalar següent:

$$\langle L^{\frac{1}{2}}(u, u(1)), L^{\frac{1}{2}}(u, u(1)) \rangle_{X_0} = \langle L(u, u(1)), (u, u(1)) \rangle_{X_0} = \int_0^1 u_x \overline{u_x}$$

Per tant,

$$X_0^{\frac{1}{2}} = \text{clausura de } X_2 \text{ amb la norma } \int_0^1 u_x \overline{u_x} = X_1$$

□

Observació 24 Observem que, tal i com havíem apuntat, el plantejament funcional és coherent amb el fet per $\alpha = 0$.

Observació 25 El teorema de Massat no parlava dels dominis. Nosaltres, però, sí hem caracteritzat $\mathcal{D}(L)$ i $\mathcal{D}(L^{\frac{1}{2}})$.

Observació 26 L'argument seguit per a veure que A_α per $\alpha > 0$ genera un semigrup analític no és aplicable quan $\alpha = 0$ ja que en el teorema de Massat cal $\alpha > 0$ (repassar la demostració per veure que, efectivament, és necessari). Per tant, s'ha hagut de buscar una altra manera per a veure si A_0 genera un semigrup i de quin tipus. Tot i això, hem tingut especial cura en treballar amb el mateix espai gran, de manera que els inversos tindran el mateix domini i els podrem comparar.

Observació 27 Observem que

$$\mathcal{D}(A_\alpha) \neq \mathcal{D}(L) \times \mathcal{D}(L)$$

(si fos així tampoc ens aniria bé per l'espai d'arribada). Per què? Perquè de fet B s'aplica de la manera següent:

$$B \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & \alpha Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix}$$

Amb aquesta formulació veiem com el que cal que estigui en $\mathcal{D}(L) = X_2$ és $u + \alpha v$, que ja és el que demanem si imposem que:

$$\begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A_\alpha)$$

3.2 Espectre de A_α i valors propis dominants.

Volem estudiar ara l'espectre de l'operador A_α , comparant-lo, si és possible, amb l'espectre de A_0 , que ja hem estudiat en el seu capítol. És a dir, pensarem A_α com una pertorbació de A_0 respecte el paràmetre α , proper a zero. El que veurem és, efectivament, que l'espectre de l'operador pertorbat s'acosta a l'espectre del no pertorbat quan $\alpha \rightarrow 0$, però només sobre compactes o, el que és el mateix, només si ens restringim a subconjunts finits de valors propis.

3.2.1 Resultats previs.

La teoria de pertorbacions que utilitzarem està extreta essencialment del capítol IV de Kato en [K]. Dedicarem, doncs, unes línies per a introduir els conceptes i resultats principals que seran usats més endavant.

Definició 28 *Siguin $G(T), G(S) \subset \mathcal{D}(A_\alpha) \times \mathcal{H}$ les gràfiques dels operadors tancats T i S . Definim com a **distància** $\delta(T, S)$ **entre els operadors T i S** la distància entre les seves gràfiques:*

$$\hat{\delta}(T, S) = \hat{\delta}(G(T), G(S)) = \max \{ \delta(G(T), G(S)), \delta(G(S), G(T)) \}$$

on, si denotem per B_M la bola unitat d'un conjunt M , tenim $\delta(M, N) = \sup_{m \in B_M} \delta(m, N)$.

Aquesta és la distància que usarem per a comparar dos operadors. En aquest sentit, tenim la següent noció de convergència entre dos operadors tancats.

Definició 29 *Direm que T_n **convergeix en sentit generalitzat** a T quan $n \rightarrow \infty$ si:*

$$\hat{\delta}(T_n, T) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

La idea de la convergència en sentit generalitzat d'operadors serà essencialment la convergència de les seves gràfiques pensades com a subespais de $\mathcal{D}(A_\alpha) \times \mathcal{H}$. Tal i com està descrita, pot ser complicat comprovar aquest tipus de convergència. Afortunadament, però, tenim propietats equivalents a aquesta definició. Només destacarem, però, les que nosaltres utilitzarem en algun moment.

Lema 30 (Kato [K]) *Siguin T i T_n operadors tancats, $n = 1, 2, \dots$*

i) Si existeix T^{-1} i és un operador acotat, llavors T_n convergiran a T en sentit generalitzat si i només si per n prou gran, existeix T_n^{-1} , és acotat i $\|T_n^{-1} - T^{-1}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

ii) Si T_n convergeix a T en sentit generalitzat i hi afegim un operador B acotat, tenim també que $T_n + B \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T + B$ en sentit generalitzat.

Observació 31 *Aquestes equivalències per a la convergència generalitzada són raonables si pensem en la convergència generalitzada dels operadors com la convergència de les seves gràfiques.*

Per a fixar criteris, l'espectre d'un operador T , $\sigma(T)$, serà per a nosaltres el complementari del **conjunt resolvent**, $\rho(T)$. L'espectre es descomposarà en $\sigma_p(T)$, o conjunt de valors propis aïllats i de multiplicitat algebraica finita, i en $\sigma_{ess}(T)$, és a dir, la resta.

Definició 32 *Direm que un operador tancat té l'espectre $\sigma(T)$ descompost en dues parts, $\sigma'(T)$ i $\sigma''(T)$, quan té una part acotada $\sigma'(T)$ separada de la resta, $\sigma''(T)$, per una corba tancada Γ , continguda en el conjunt resolvent de T , de manera que Γ tanca $\sigma'(T)$ en el seu interior i deixa $\sigma''(T)$ a l'exterior.*

Observació 33 *Usualment, $\sigma'(T)$ serà un subconjunt finit de $\sigma(T)$.*

En dimensió finita, sabem que quan pertorbem un operador tenim una certa *continuitat* dels valors propis (considerant la seva multiplicitat) de l'operador pertorbat respecte als del no pertorbat. Aquest resultat es dona també en dimensió infinita si ens restringim a subconjunts finits de valors propis, cosa que es deduirà del següent resultat de teoria de pertorbacions que apareix també en el capítol IV del [K].

Teorema 34 (Semicontinuitat superior de l'espectre, Kato [K]) *Sigui T un operador tancat qualsevol amb l'espectre separat en dues parts $\sigma'(T)$ i $\sigma''(T)$ per una corba tancada Γ i sigui $\mathcal{H} = M'(T) \oplus M''(T)$ la descomposició associada de l'espai total \mathcal{H} . Aleshores existeix un $\delta > 0$ que dependrà de l'operador T i de la corba Γ amb les propietats següents:*

i) Qualsevol operador S tal que $\hat{\delta}(S, T) < \delta$ té l'espectre separat per Γ també en dues parts $\sigma'(S)$ i $\sigma''(S)$, amb $\Gamma \subset \rho(S)$.

ii) En la descomposició de \mathcal{H} associada a aquesta separació de l'espectre, $\mathcal{H} = M'(S) \oplus M''(S)$ es té que $M'(S)$ i $M''(S)$ són espais isomorfs a $M'(T)$ i $M''(T)$, respectivament. En particular, es mantenen les dimensions d'aquests espais.

iii) A més, aquesta descomposició és contínua en S , és a dir, que la projecció $P[S]$ de \mathcal{H} tendeix a la projecció $P[T]$ si S convergeix a T en sentit generalitzat.

És a dir, si considerem un operador prou proper al que teníem, l'espectre es pot descompondre de la mateixa manera.

L'objectiu d'ara en endavant està clar: voldrem veure que A_α convergeix en sentit generalitzat a A_0 quan $\alpha \rightarrow 0$, d'on deduirem la continuïtat de subconjunts finits de valors propis de A_α respecte de α , i també precisarem el sentit de tot això. També veurem què passa amb la resta de valors propis i la resta de l'espectre, si és que tenim espectre essencial.

3.2.2 Valors propis de A_α .

Si volem comparar l'espectre de A_α amb el de A_0 , comencem pels valors propis. El que sabem dels valors propis de A_0 és que són aïllats i de multiplicitat algebraica finita. Així, agafar-ne un subconjunt finit $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ és equivalent a separar l'espectre en dues parts:

$$\sigma'(A_0) = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s\}$$

i

$$\sigma''(A_0) = \sigma(A_0) \setminus \sigma'(A_0)$$

ja que, com que els valors propis són aïllats, podrem trobar la corba Γ del conjunt resolvent que ens separi l'espectre d'aquesta manera. La descomposició de \mathcal{H} associada és $\mathcal{H} = M'(A_0) \oplus M''(A_0)$ amb $\dim M'(A_0) = m =$ multiplicitat total de $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ on $m < \infty$.

I aplicar el teorema de separació de l'espectre (teorema 34) a aquest tipus de separació ens porta al següent raonament, tal i com fa Kato en el capítol IV del [K]. Pel teorema sabem que Γ també ens separarà l'espectre de A_α , $\alpha > 0$, en dues parts $\sigma'(A_\alpha)$ i $\sigma''(A_\alpha)$ i que es manté la dimensió dels espais propis associats a aquesta descomposició, sempre que α sigui *prou petita*. En quin sentit? Doncs α ha de ser prou petita com perquè $\hat{\delta}(A_\alpha, A_0) < \delta$, per un cert $\delta > 0$ que dependrà de A_0 i Γ . I $\hat{\delta}(A_\alpha, A_0) < \delta$ a partir d'un cert α proper a zero si A_α convergeix a A_0 en sentit generalitzat quan $\alpha \rightarrow 0$ (veure definició 29). En particular, hauríem vist que:

$$\dim M'(A_\alpha) = \dim M''(A_\alpha) = m \quad \text{si } \alpha \sim 0$$

Que la dimensió de l'espai associat a $\sigma'(A_\alpha)$ sigui m en particular vol dir que en l'interior de la corba Γ hi ha un nombre finit de valors propis de A_α amb multiplicitat total m , que és finita. De fet, encara podem afinar més: com que podem repetir l'argument prenent una corba que inclogui un sol valor propi en el seu interior, podem concloure que els valors propis pertorbats dins Γ també són aïllats. Així, $\sigma'(A_\alpha)$ està format únicament per valors propis aïllats i de multiplicitat algebraica finita. A més, com que podem escollir una corba entorn de cada valor propi tan petita com vulguem, de manera que el valor propi pertorbat haurà de ser també en l'interior d'aquesta corba si α és prou petit, podem afirmar que qualsevol sistema finit de valors propis de A_α varia contínuament en α , si $\alpha \sim 0$, respecte el sistema finit corresponent de valors propis de A_0 . En quin sentit parlem de continuïtat? Doncs que en un entorn qualsevol d'un únic valor propi λ_k qualsevol de A_0 de multiplicitat algebraica m_k (la vora d'aquest entorn farà el paper de corba Γ) hi haurà exactament m_k valors propis de A_α , tenint en compte les multiplicitats, si α és prou proper a zero (el com de petit hagi de ser vindrà marcat per l'entorn escollit i pels operadors). Aquesta continuïtat també la tenim en les projeccions, l'operador resolvent, etc., però aquí no hi entrarem.

Per tant, l'únic que ens queda per garantir la continuïtat de subconjunts finits de valors propis és que A_α convergeix a A_0 en sentit generalitzat quan $\alpha \rightarrow 0$.

Teorema 35 A_α convergeix en sentit generalitzat a A_0 quan $\alpha \rightarrow 0$.

Demostració.

Per a veure la convergència en sentit generalitzat aplicarem una de les propietats equivalents que hem vist en el lema 30: com que A_0 i A_α són

operadors tancats perquè són generadors d'un semigrup contractiu i d'un semigrup analític, respectivament, el que haurem de veure és que els inversos existeixen i són acotats, i que la norma de la diferència tendeix a zero quan α va a zero.

1. Els inversos existeixen i són operadors acotats de \mathcal{H} .

Ja hem vist en l'apartat 2.2.2 que l'invers de A_0 està definit per:

$$A_0^{-1} \begin{pmatrix} w, & w(1) \\ z, & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_0, & -u_0(1) \\ w, & w(1) \end{pmatrix}$$

per a tot $\begin{pmatrix} w, & w(1) \\ z, & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ donat, on u_0 és la solució del problema:

$$(3.4) \quad \begin{cases} (u_0)_{xx} = -z \\ u_0(0) = 0 \\ \varepsilon(u_0)_x(1) = \beta + \varepsilon r w(1) \end{cases}$$

I també hem vist que A_0^{-1} definit d'aquesta manera és un operador continu de \mathcal{H} en $\mathcal{D}(A_0)$. Doncs de manera anàloga definirem l'invers de A_α :

$$A_\alpha^{-1} \begin{pmatrix} w, & w(1) \\ z, & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_\alpha, & -u_\alpha(1) \\ w, & w(1) \end{pmatrix}$$

per a tot $\begin{pmatrix} w, & w(1) \\ z, & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ donat, on u_α és ara la solució del problema:

$$(3.5) \quad \begin{cases} (u_\alpha - \alpha w)_{xx} = -z \\ u_\alpha(0) = 0 \\ (\varepsilon u_\alpha - \varepsilon \alpha w)_x(1) = \beta + \varepsilon r w(1) \end{cases}$$

(hem d'agrupar les variables d'aquesta manera perquè totes les derivades tinguin sentit, tenint en compte els dominis).

Observem que tan sols hem afegit a l'equació 3.4 els termes multiplicats per α , de manera que quan fem $\alpha = 0$ recuperem l'expressió per A_0^{-1} . Es pot comprovar que aquest operador està ben definit, que és efectivament l'invers de A_α i que és continu.

2. $\|A_\alpha^{-1} - A_0^{-1}\| \rightarrow 0$ quan $\alpha \rightarrow 0$.

És fàcil veure que l'operador diferència actua de la manera següent:

$$(A_\alpha^{-1} - A_0^{-1}) \begin{pmatrix} w, & w(1) \\ z, & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u, & u(1) \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$$

on $u = u_0 - u_\alpha$. Si fem un canvi de variables en el problema 3.5 i diem $v = u_\alpha - \alpha w$, observarem que v i u_0 són solució del mateix problema 3.4. Així, $v = u_0$, d'on $u = -\alpha w$. Amb aquesta apreciació, ara és fàcil acotar la norma de l'operador diferència com:

$$\left\| (A_\alpha^{-1} - A_0^{-1}) \begin{pmatrix} w, & w(1) \\ z, & \beta \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}} = \alpha^2 \int_0^1 |w_x|^2 \leq \alpha^2 \left\| \begin{pmatrix} w, & w(1) \\ z, & \beta \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}$$

on ara sí és evident que $\|(A_\alpha^{-1} - A_0^{-1})\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$ si $\alpha \rightarrow 0$.

Hem demostrat, doncs, la convergència en sentit generalitzat dels operadors dependents de α . \square

Corol.lari 36 *Els valors propis de A_α convergeixen sobre compactes als valors propis de A_0 , quan $\alpha \rightarrow 0$, en el sentit que hem descrit.*

Observació 37 *Parlar de convergència sobre compactes quan els valors propis són aïllats és una altra manera de dir que ens quedem amb subconjunts finits de valors propis.*

Observació 38 *El teorema no ens permet parlar d'una convergència global dels espectres: si ens canvien el conjunt finit de valors propis que voldrem pertorbar (és a dir, la corba tancada Γ), ens canviarà també l' α prou petit a partir del qual els espectres s'assemblen allà dins, ja que aquest α depèn de la corba (veure el teorema 34). Si ho pensem a la inversa, si ens donem $\alpha > 0$, sembla lògic pensar en un cert nombre finit màxim de valors propis de A_α*

que seran pertorbació dels valors propis de A_0 corresponents, considerant les multiplicitats. És a dir, tindrem un compacte màxim de convergència dels espectres per aquell α donat.

Podríem tenir, però, convergència per la resta de valors propis? Doncs no, perquè mentre els valors propis de A_α , $\alpha > 0$ estan dins un sector (que dependrà de α), els de A_0 s'acosten a l'eix imaginari. De fet, el que s'intueix que passa és que aquest sector es va obrint a mida que α s'acosta a zero, arribant a ser tot el semipla en el cas límit. Així, no podem parlar de continuïtat en la resta de valors propis.

Com a exemple gràfic d'aquest fenomen, vegem la figura 3.1. En aquesta gràfica podem observar com els valors propis de A_α cada cop s'allunyen més dels de A_0 .

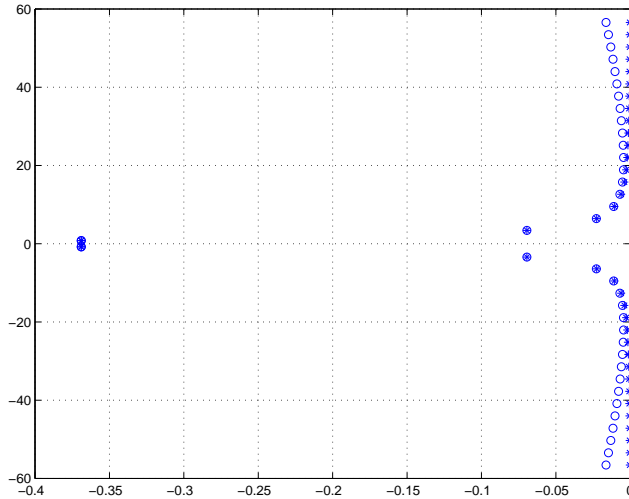


Figura 3.1: Gràfica dels 20 primers valors propis de A_0 (dibuixats en '*') i els de A_α per $\alpha = 10^{-5}$ (dibuixats en 'o').

Hem vist la relació dels valors propis de l'operador pertorbat als del no pertorbat, però no hem considerat què passava amb la resta de l'espectre. De fet, a diferència de A_0 , A_α amb $\alpha > 0$ tindrà espectre essencial.

3.2.3 Espectre essencial de A_α .

Ja hem vist que l'espectre essencial estava format per tots aquells punts de l'espectre que no fossin valors propis aïllats i de multiplicitat algebraica finita. Ho veurem en detall en el capítol 4, concretament en el teorema 50, però podem avançar que quan $\alpha > 0$ es té com a espectre essencial:

$$\sigma_{ess}(A_\alpha) = \left\{ \frac{-1}{\alpha} \right\}$$

Què passa amb l'espectre essencial quan $\alpha = 0$? Hem vist en anteriors apartats que podíem invertir A_0 i que l'invers era un operador compacte, de manera que A_0 no pot tenir espectre essencial. Intuïtivament, a mida que α es va acostant a zero l'espectre essencial (el punt $\frac{-1}{\alpha}$) es va allunyant cap a $-\infty$ fins que, en el cas límit, *desapareix*.

3.2.4 Existència de valors propis dominants per A_α quan $\alpha > 0$.

Com a conclusió dels dos apartats anteriors es pot formular el següent teorema:

Teorema 39 *L'operador A_α , amb $\alpha, \varepsilon > 0$ admet un subconjunt finit de valors propis dominants.*

Demostració.

Considerem un operador A_α , per $\alpha > 0$ fixada. Com que A_α genera un semigrup analític, els seu espectre estarà contingut en un sector, que denotarem per S_α . També hem vist que l'espectre essencial està format per un únic punt $\frac{-1}{\alpha}$, de manera que és l'únic punt d'acumulació possible de l'espectre dins el sector S_α . Si qualsevol altre punt de l'espectre és aïllat i estan dins aquest sector, n'hi haurà un nombre finit amb part real major que la resta i que $\frac{-1}{\alpha}$ (si α és prou petit, $\frac{-1}{\alpha}$ estarà prou a l'esquerra com perquè això passi): aquest és el subconjunt finit de valors propis dominants. Observem que efectivament hi haurà valors propis a la dreta d'aquest espectre essencial perquè quan α s'acosta a zero, els primers valors propis s'acostaran a l'eix imaginari, tal i com fan els valors propis de A_0 . \square

Observació 40 *Podem observar en el fenomen dels valors propis dominants dos fets curiosos, que no demostrarem: la dimensió dels subespais dominants*

no és constant per a tots els $\alpha > 0$; i els valors propis dominants no són necessàriament pertorbacions dels mateixos valors propis de A_0 . Com hem dit, no demostrarem aquestes afirmacions, però intuïtivament sembla clar que a mida que α s'acosta a 0, els compactes on $\sigma_p(A_\alpha)$ s'assembla a $\sigma_p(A_0)$ són cada cop més grans. D'altra banda, com més valors propis de A_0 agafem, més a prop estan de l'eix imaginari, de manera que la seva part real és cada vegada més gran. Com que en decreïxer α hi ha més valors propis de A_α que s'assemblen a uns valors propis amb part real cada cop més gran, és lògic pensar que els valors propis dominants de A_α seran aquests nous que passen a assemblar-se als de A_0 . Dit d'una altra manera, no seran pertorbacions provinents dels mateixos valors propis de A_0 , sinó que vindran de valors propis diferents (que potser en l' A_α anterior tenien part real menor). Com a il·lustració d'aquest fenomen tenim la figura 3.2: en la gràfica de l'esquerra, el subconjunt finit de $\sigma_p(A_\alpha)$ que és pertorbació de valors propis de A_0 està format pels 4 primers valors propis; d'aquests, els dominants són les pertorbacions del tercer i quart valors propis de A_0 . Per contra, en mirar-nos la situació per una α menor, el subconjunt pertorbat de valors propis està format ara per 6 elements, dels quals els dominants són les pertorbacions del cinquè i el sisè de A_0 : se n'han afegit dos, que abans estaven més enrera, que han passat a ocupar el lloc de dominants.

Si els valors propis que són dominants es van succeint (els de menor part real són els que després passaran a davant) és de suposar que, per continuïtat, hi hagi un α intermig en què els nous valors propis dominants tinguin la mateixa part real que els antics valors propis dominants: hi ha un moment, doncs, que el nombre de valors propis dominants ha canviat. Aquest raonament intuïtiu té la seva il·lustració gràfica en la figura 3.3, anàloga a l'anterior, on veiem 2 valors propis dominants en la gràfica de l'esquerra, però se n'intueixen 4 en la de la dreta. Per tant, si pensem que el fet de tenir un nombre finit de valors propis dominants ens permet escriure l'equació en derivades parcials com una equació diferencial ordinària (quan $t \rightarrow \infty$), el que tindríem és que l'ordre d'aquesta equació no és constant (en el nostre exemple, passaria de 2 a 4).

Observació 41 Per $\alpha > 0$ fixada, l'equació en derivades parcials té com a límit una equació diferencial ordinària, ja que acabem de veure en el teorema l'existència d'un conjunt finit de valors propis dominants en aquest cas. Tot i això, els dos fenòmens anteriors ens fan veure que no és possible obtenir informació sobre l'equació diferencial ordinària límit de manera uniforme per

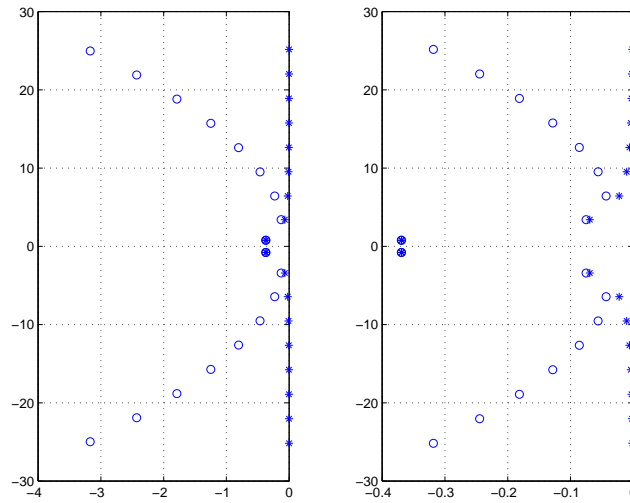


Figura 3.2: Comparació amb els valors propis de A_0 (dibuixats en '*') dels valors propis per $\alpha = 0.01$, a l'esquerra, i per $\alpha = 0.001$ a la dreta (dibuixats en 'o').

a tots els $\alpha > 0$: per una banda, l'ordre de l'e.d.o. ens depèn de la dimensió dels espais corresponents als valors propis dominants, que hem observat que varia quan $\alpha \rightarrow 0$; i, per l'altra, els coeficients de l'e.d.o. s'obtidrien a partir de les expressions dels valors propis dominants de A_α , expressions que no podem obtenir de manera general en termes de $\alpha > 0$ ja que no vénen dels mateixos valors propis de A_0 (de manera que no podem escriure els valors propis dominants com a pertorbacions respecte α dels de A_0). L'únic que podríem fer, doncs, és estudiar l'equació diferencial ordinària per a cadascun dels $\alpha > 0$, equació que, per exemple, podríem escriure si fóssim capaços de trobar el conjunt de valors propis dominants en cada cas.

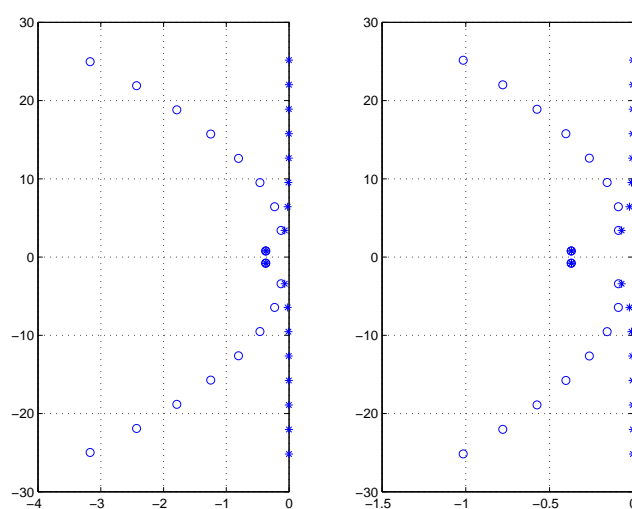


Figura 3.3: Comparació amb els valors propis de A_0 (dibuixats en '*') dels valors propis per $\alpha = 0.01$, a l'esquerra, i per $\alpha = 0.0032$ a la dreta (dibuixats en 'o').

Capítol 4

Dependència del sistema respecte $\varepsilon \geq 0$.

Tot i que en aquest capítol es pretén l'estudi del problema per a valors de ε propers a zero, té una especial rellevància el cas límit, és a dir, el problema per $\varepsilon = 0$, degut al caràcter explícit de les solucions i dels valors propis. De fet, el problema per ε petit el pensarem com una pertorbació del problema límit. És per això que dediquem un primer apartat a un estudi exhaustiu d'aquest cas.

4.1 El cas $\varepsilon = 0$

El sentit físic de fer zero aquest paràmetre, sense que els altres quedin afectats, és pensar una massa m infinita (recordem que ε és inversament proporcional a la massa m de l'extrem, veure l'apartat 1.2.3). Així, doncs, pensarem en un amortidor visco-elàstic amb una massa a l'extrem infinitament gran. En aquest cas, el problema a resoldre és el següent:

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - u_{xx} - \alpha u_{txx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad t > 0 \\ u_{tt}(1, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1 \\ u_t(x, 0) = v_0(x), \quad 0 < x < 1 \\ u(1, 0) = \eta \quad (= u_0(1)) \\ u_t(1, 0) = \mu \quad (= v_0(1)) \end{array} \right.$$

on $u = u(x, t)$ i $\alpha > 0$. Tot i que els resultats d'aquest capítol valdran per a valors de $\alpha > 0$, es comentarà el cas $\alpha = 0$, que ja s'ha fet amb detall en el capítol 2.

4.1.1 Valors propis i funcions pròpies.

En aquest cas, els valors propis i les funcions pròpies es poden calcular explícitament. Efectivament, si busquem solucions de la forma $u(x, t) = e^{\lambda t} u(x)$ (és a dir, λ és valor propi i $u(x)$ és funció pròpia) i substituïm en 4.1 ens queda l'equació:

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 + \lambda \alpha) u_{xx} - \lambda^2 u = 0, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ \lambda^2 u(1) = 0 \end{array} \right.$$

on, ara, $u = u(x)$ i $\alpha > 0$ (tot i que comentarem el cas $\alpha = 0$). Si suposem d'entrada que $\lambda \neq 0$ i que $\lambda \neq \frac{-1}{\alpha}$ (que són els dos valors crítics del problema) obtenim com a resultat el conjunt $u_n(x, t) = e^{\lambda_n t} u_n(x)$, amb:

$$\lambda_n = \frac{-\alpha \pi^2 n^2 \pm \sqrt{\alpha^2 \pi^4 n^4 - 4\pi^2 n^2}}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

i

$$u_n(x) = e^{in\pi x} - e^{-in\pi x}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Però ens havíem deixat dos valors possibles per a λ : $\lambda = -\frac{1}{\alpha}$ i $\lambda = 0$ (observem que aquest últim cas es podrà incloure en l'anterior expressió de λ_n amb $n = 0$). Vegem si són possibles valors propis. Si ens fixem primerament en $\lambda = -\frac{1}{\alpha}$, tenim que u ha de ser solució de:

$$(4.3) \quad \begin{cases} u = 0, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

és a dir, forçosament la *funció pròpia* corresponent seria $u \equiv 0$, que no és funció pròpia. Així, $\lambda = -\frac{1}{\alpha}$ no és valor propi.

Mirem-nos ara $\lambda = 0$. En aquest cas veurem que, no només tenim un valor propi sinó que té multiplicitat algebraica doble. Efectivament, si $\lambda = 0$ l'equació a resoldre és:

$$(4.4) \quad \begin{cases} u_{xx} = 0, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

que té per solució totes les funcions de la forma $u(x) = kx$, $k \in \mathbb{R}$. Per tant, $\lambda = 0$ és valor propi de funció pròpia $u(x, t) = e^{0t}x = x$.

Però $\lambda = 0$ també dóna lloc a una solució no trivial del tipus $u(x, t) = e^{\lambda t}u_0(x) + te^{\lambda t}u_1(x)$ és a dir, en aquest cas, $u(x, t) = u_0(x) + tu_1(x)$ on, si ho substituïm en 4.1, tenim que:

$$u_0(x) = c_0 x, \quad c_0 \in \mathbb{R}$$

$$u_1(x) = c_1 x, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Així, tenim aquest valor propi amb multiplicitat algebraica igual a 2 (podem comprovar que no és superior a 2 veient que les funcions de la forma $u(x, t) = u_0(x) + tu_1(x) + t^2u_2(x)$, amb $u_2(x) \neq 0$ no són solució de 4.1).

Per tant, recopilant, els valors propis i les solucions associades pel cas $\varepsilon = 0$ són:

$$\lambda_n = \frac{-\alpha \pi^2 n^2 \pm \sqrt{\alpha^2 \pi^4 n^4 - 4\pi^2 n^2}}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

i

$$u_n(x, t) = e^{\lambda_n t} (e^{in\pi x} - e^{-in\pi x}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ó

$$u_n(x, t) = c_0 x + c_1 x t \quad \text{si } n = 0$$

Observem que el valor de r (recordem, la viscositat de l'amortidor) no influeix en el resultat del problema per $\varepsilon = 0$: òbviament, ja que r apareixia multiplicada per ε en les condicions de contorn (veure l'equació 1.2). Si ho pensem des d'un punt de vista físic, té cert sentit pensar que la fricció que actua en l'extrem on hi ha la roda deguda a la viscositat de l'amortidor deixa de tenir rellevància davant el fet de tenir-hi una massa infinita, però sí en canvi continua essent important el valor de α , relacionat amb la viscositat interna de la molla.

4.1.2 Existència d'un valor propi dominant doble.

Tot i tenir-los explícitament, és convenient fer un estudi qualitatiu d'aquests infinits valors propis. Una de les primeres coses que es poden observar és que $\lambda = 0$ és **valor propi dominant** quan $\varepsilon = 0$ i $\alpha > 0$. La manera de veure-ho és utilitzant energies, tal i com s'ha fet en la secció 2.2.2. De fet, utilitzarem la mateixa energia que en aquest apartat, però sense multiplicar-la per ε .

Així, prenem

$$E(u(x, t)) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u_x|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} |u_t(1)|^2$$

Si ens mirem la derivada d'aquesta energia sobre solucions $u(x, t)$ de 4.1 tenim, després d'integrar per parts:

$$\frac{d}{dt} E(u(x, t)) = -\alpha \int_0^1 |u_{tx}|^2 + \operatorname{Re} \left[\bar{u}_x u_t + \alpha \bar{u}_t u_{tx} \right] \Big|_0^1$$

Si ens mirem aquesta expressió per a solucions de la forma $u(x, t) = e^{\lambda t} u(x)$, se'ns simplifica degut a les condicions de contorn de 4.1, ja que:

$$u(0, t) = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda t} u(0) = 0 \Rightarrow u(0) = 0$$

i

$$u_{tt}(1, t) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} u(1) = 0 \Rightarrow u(1) = 0$$

Observem que d'aquestes condicions es dedueix que:

$$u_t(0, t) = \lambda e^{\lambda t} u(0) = 0$$

i que

$$u_t(1, t) = \lambda e^{\lambda t} u(1) = 0$$

ja que $u(0) = u(1) = 0$. Per tant, si substituïm aquestes condicions de contorn en la nostra expressió, la derivada de l'energia ens queda com:

$$\frac{d}{dt} E(u(x, t)) = -\alpha \int_0^1 |u_{tx}|^2 \leq 0$$

Mirem-nos ara aquesta energia directament sobre solucions de la forma $u(x, t) = e^{\lambda t} u(x)$. En aquest cas, la derivada és.

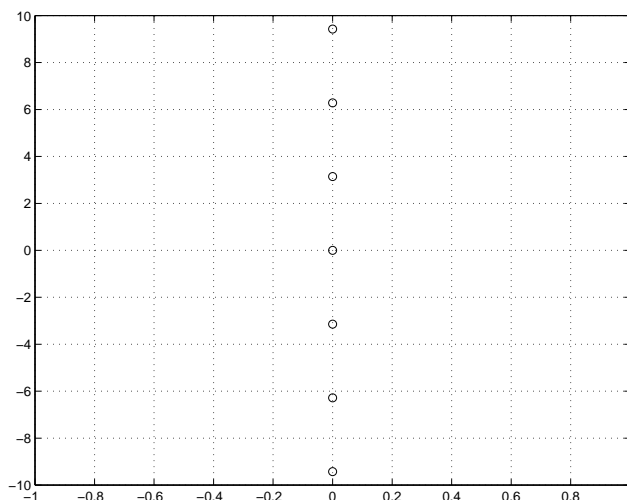
$$\frac{d}{dt} E(u(x, t)) = \operatorname{Re} \lambda e^{2 \operatorname{Re} \lambda t} f(x)$$

on $f(x) = \left(\int_0^1 |u_x|^2 dx + \int_0^1 |\lambda u|^2 dx + |\lambda u(1)|^2 \right) \geq 0$. I havíem vist que per a solucions d'aquest tipus l'energia era decreixent, de manera que l'única opció és que $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. De fet, repassant els càlculs es pot comprovar com, suposant que $\alpha > 0$, tenim que $\operatorname{Re} \lambda < 0$ si λ és un valor propi diferent de zero. Per tant, $\lambda = 0$ és un valor propi doble **dominant** si $\varepsilon = 0$ i $\alpha > 0$.

Si considerem, però, $\alpha = 0$ podem reescriure els valors propis calculats en l'apartat anterior:

$$\lambda_n = n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}$$

i continuem tenint $\lambda = 0$ com a valor propi doble. És a dir, que tots els valors propis estan situats sobre la mateixa recta vertical $\operatorname{Re} \lambda = 0$. Per tant, és evident que no tenim cap subconjunt finit de valors propis amb part real major estrictament que la resta: no tenim, doncs, un subconjunt finit de valors propis dominants. De fet, en el capítol 2 ja havíem vist aquest resultat, però considerant valors estrictament positius de ε .

Figura 4.1: Valors propis per $\alpha = 0$.

4.1.3 Valors propis per $\varepsilon = 0$.

El fet de tenir explícitament els valors propis en aquest cas permet, per exemple, estudiar quina geometria tenen com a conjunt, sempre en funció de $\alpha > 0$. Si ens mirem els valors propis, el primer que podem observar és que, a priori, en podem tenir de reals i complexos. Concretament, tindrem tres possibilitats:

- $0 < n < \frac{2}{\alpha\pi}$. En aquest cas, tindrem λ_n *complexos*. Observem, però, que per α fixat tindrem un nombre finit de valors propis no reals, ja que hi ha un nombre finit de $n < \frac{2}{\alpha\pi}$, amb $n \in \mathbb{N}$.
- $n = \frac{2}{\alpha\pi}$. En aquest cas, α ha de tenir un valor molt concret ($\alpha = \frac{2}{\pi m}$, $m \in \mathbb{N}$). Si dóna aquesta casualitat, tindrem $\lambda_n = \frac{-2}{\alpha}$ també com a valor propi *doble*.
- $n > \frac{2}{\alpha\pi}$. Observem que tenim infinits λ_n en aquesta situació (de fet, segons el valor de α pot arribar a ser la única situació possible). En aquest cas, són valors propis *reals*.

El que farem és veure la geometria en cadascun d'aquests casos i cap a on tendeixen els valors propis quan $n \rightarrow \infty$.

1. $0 < n < \frac{2}{\alpha\pi}$

Com ja hem comentat, hi ha un nombre finit de valors propis complexos, si és que n'hi ha algun: observem que si $\frac{2}{\alpha\pi} < 1$ no tindrem cap $n \in \mathbb{N}$ menor que aquesta quantitat i, per tant, no tindrem λ_n complexos. En particular, com menor sigui α , més valors propis complexos tindrem. Però si $0 < n < \frac{2}{\alpha\pi}$, els valors propis són:

$$\lambda_n = \frac{1}{2} \left(-\alpha\pi^2 n^2 \pm i\pi n \sqrt{4 - \alpha^2 \pi^2 n^2} \right)$$

Si ens mirem la part real d'aquests valors propis, $Re \lambda_n = \frac{-\alpha\pi^2 n^2}{2}$, podem observar que és *decreixent* en n , de manera que, en particular, els valors propis complexos compleixen que:

$$Re \lambda_n < Re \lambda_1 = \frac{-\alpha\pi^2}{2} < 0, \quad \forall 0 < n < \frac{2}{\alpha\pi}$$

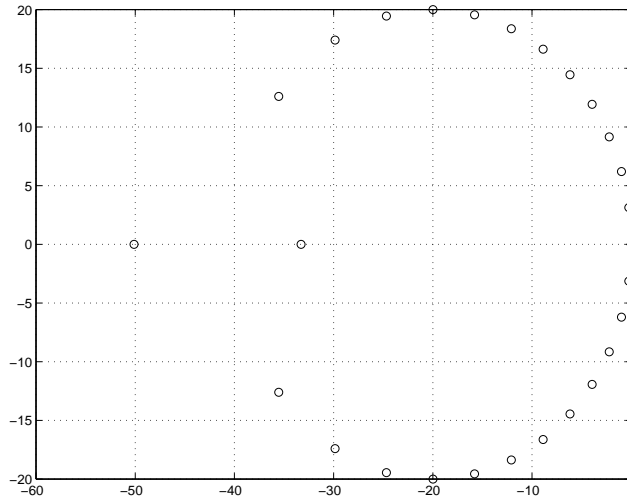
A més, podem comprovar que aquest conjunt de valors propis complexos estan situats sobre una circumferència de centre $(\frac{-1}{\alpha}, 0)$ i radi $\frac{1}{\alpha}$, tal com il.lustra la figura 4.2.

2. $n = \frac{2}{\alpha\pi}$

Ja hem parlat del tipus d' α que cal per tal que es doni aquesta situació de valor propi doble $\lambda_n = \frac{-2}{\alpha}$. De ser així, quina posició ocuparia en l'espai respecte els possibles valors propis complexos? Només cal comprovar que

$$\frac{-2}{\alpha} < \frac{-\alpha\pi^2 n^2}{2} < 0, \quad \forall 0 < n < \frac{2}{\alpha\pi}$$

per veure que aquest valor propi és menor que les parts reals dels valors propis complexos anteriors: continua, doncs, la successió decreixent en n . Veure la figura 4.3.

Figura 4.2: $\alpha = 0.05$: existència de valors propis complexos.

$$3. n > \frac{2}{\alpha\pi}$$

En aquest cas, que inclou els infinits valors propis excepte, potser, els primers, ens trobem amb els valors propis reals:

$$\lambda_n = \frac{-\alpha\pi^2 n^2 \pm \sqrt{\alpha^2 \pi^4 n^4 - 4\pi^2 n^2}}{2}, \quad n > \frac{2}{\alpha\pi}$$

Distingirem entre λ_n^+ i λ_n^- , segons si ens quedem amb el signe positiu o amb el negatiu. Observem, però, que tant si ens quedem amb un signe com amb l'altre tenim valors propis *estrictament negatius*: per a λ_n^- és evident; i per λ_n^+ , només cal recordar que $n > \frac{2}{\alpha\pi}$, que és a la condició necessària i suficient a la qual s'arriba si s'imposa que $\lambda_n^+ < 0$. Per tant, quan $\varepsilon = 0$ tots els valors propis verifiquen que $\text{Re } \lambda_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Mirem-nos-els, però, més detingudament i observarem el que ens diu el següent lema.

Lema 42 *El subconjunt de valors propis $\{\lambda_n^+, n > \frac{2}{\alpha\pi}\}$ té límit fora del conjunt de valors propis. Concretament,*

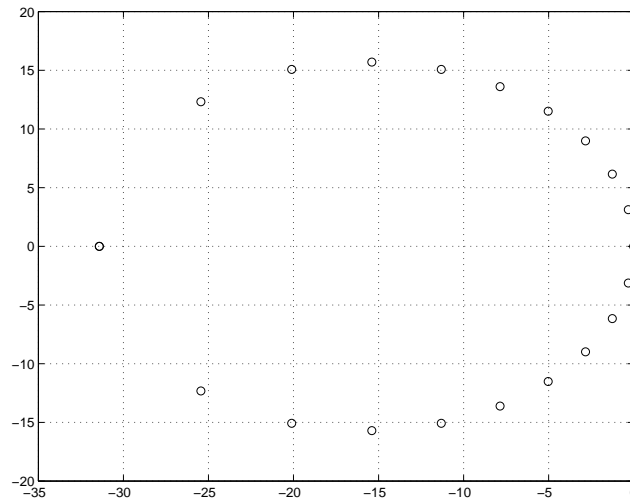


Figura 4.3: $\alpha = \frac{2}{10\pi}$: existència d'un segon valor propi doble, $\lambda = -10\pi$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^+ = \left(\frac{-1}{\alpha} \right)$$

i hi tendeixen per l'esquerra.

Observació 43 *El límit d'aquesta subsuccessió no és valor propi, tal i com ja hem comprovat al principi d'aquest capítol, però veurem més endavant que és l'únic punt de l'espectre essencial de l'operador corresponent al problema per $\varepsilon = 0$.*

Demostració.

Només cal fer els càlculs. Per veure qui és el límit, només cal recordar que

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + o(x^2), \quad x \sim 0$$

Amb aquesta observació, escrivim els λ_n^+ com

$$2\lambda_n^+ = -\alpha\pi^2 n^2 + \alpha\pi^2 n^2 \sqrt{1 - \frac{4}{\alpha^2 \pi^2 n^2}} =$$

$$-\alpha \pi^2 n^2 + \alpha \pi^2 n^2 \left[1 - \frac{4}{2 \alpha^2 \pi^2 n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right] =$$

$$-\frac{1}{\alpha} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'on ja tenim que $\lambda_n^+ \rightarrow -\frac{1}{\alpha}$ quan $n \rightarrow \infty$.

Per veure que hi tendeixen per l'esquerra, en tenim prou amb comprovar que $\lambda_n^+ < -\frac{1}{\alpha}$. I això es compleix simplement del fet que $n > \frac{2}{\alpha\pi}$ \square

I què podem dir dels λ_n^- ? Ho recollim en el següent lema.

Lema 44 *El subconjunt de valors propis $\{\lambda_n^-, n > \frac{2}{\alpha\pi}\}$ té límit $-\infty$.*

A més, $\lambda_n^- < \frac{-2}{\alpha}$ i és decreixent en $n > \frac{2}{\alpha\pi}$.

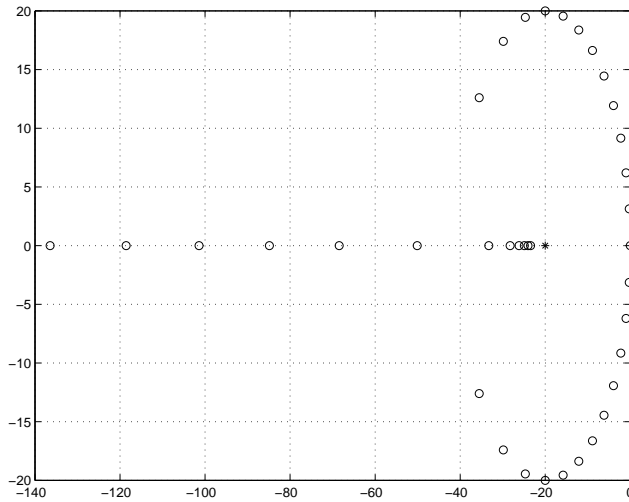


Figura 4.4: $\alpha = 0.05$: gràfica dels valors propis reals.

4.1.4 Espectre essencial quan $\varepsilon = 0$.

Per a fixar criteris, denotarem, durant aquest capítol, la dependència respecte ε de l'operador corresponent com $A_\alpha(\varepsilon)$, per $\varepsilon \geq 0$. Així, l'operador corresponent al problema d'aquest apartat, per al qual hem trobat i analitzat els valors propis, el denotarem com $A_\alpha(0)$.

Ens preocuparem, doncs, de trobar l'espectre essencial de $A_\alpha(0)$ per $\alpha > 0$, que veurem més endavant que, de fet, també és l'espectre essencial de $A_\alpha(\varepsilon)$ per $\varepsilon > 0$. Hi ha diverses definicions d'espectre essencial, cadascuna d'elles amb les propietats corresponents. Nosaltres, però, ens fixarem en la que s'utilitza en el capítol 5 de [H].

Definició 45 *Sigui L un operador lineal en un espai de Banach. Anomenem **espectre essencial de L** , que denotem per $\sigma_{ess}(L)$, a qualsevol nombre complex que no estigui en el conjunt resolvent de l'operador o sigui un valor propi de L aïllat i de multiplicitat algebraica finita. Altrament, parlarem del conjunt de **punts normals** de l'operador.*

Amb aquesta definició, l'espectre essencial té la propietat de ser invariant per pertorbacions relativament compactes de l'operador, tal i com es deduirà del següent teorema de [H], que reproduïm a continuació.

Teorema 46 (Henry [H]) *Sigui $T + S$ una pertorbació relativament compacta de l'operador tancat T , és a dir, S és un operador lineal complex que $\mathcal{D}(S) \supset \mathcal{D}(T)$ i que $S(T - \lambda_0 Id)^{-1}$ és compacte per algun $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Sigui \mathcal{U} un conjunt obert connex qualsevol de \mathbb{C} format únicament per punts normals de T . Llavors, o bé \mathcal{U} conté únicament punts normals de $T + S$ o bé conté únicament valors propis de $T + S$.*

Mirem-nos qui són exactament aquests operadors en el nostre cas. En primer lloc, l'operador corresponent al problema 4.1, és:

$$A_\alpha(0) \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v, v(1)) \\ ((u + \alpha v)_{xx}, 0) \end{pmatrix}$$

amb domini

$$\mathcal{D}(A_\alpha(0)) = \mathcal{D}(A_\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in X_1 \times X_1, (u + \alpha v) \in H^2 \right\} \subset \mathcal{H}$$

tal i com ja havíem vist en el capítol anterior, quan ens miràvem l'operador respecte el paràmetre α . Tot i que allà treballàvem amb $\varepsilon > 0$, els espais per $A_\alpha(0)$ continuen essent els mateixos.

Un cop definit l'operador, voldrem trobar $\sigma_{ess}(A_\alpha(0))$. Però per a fer-ho no treballarem directament amb aquest operador, sinó amb una pertorbació d'aquest. Així, definim:

$$(A_\alpha(0) + B) \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v, v(1)) \\ ((u + \alpha v)_{xx}, 0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (0, 0) \\ (-\frac{1}{\alpha}v, 0) \end{pmatrix}$$

Observem que es tracta de treballar amb el problema pertorbat

$$(4.5) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(u_t - \alpha u_{xx}) = \frac{-1}{\alpha}(u_t - \alpha u_{xx}), & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \\ u_{tt}(1, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

on ja s'intueix el canvi de variables que convindrà utilitzar.

Teorema 47 *L'espectre essencial de l'operador pertorbat és:*

$$\sigma_{ess}(A_\alpha(0) + B) = \left\{ \frac{-1}{\alpha} \right\}$$

Demostració.

Treballar amb el problema pertorbat 4.5 ens dóna de forma natural un canvi de variables. Siguin $\begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix}$ les noves variables, obtingudes de les anteriors mitjançant el canvi:

$$\begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A_\alpha) \longrightarrow \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v - \alpha u_{xx}, v(1)) \end{pmatrix}$$

és a dir, la identitat sobre la primera component $(u, u(1)) \in X_1 \subset H^1(0, 1) \times \mathbb{C}$ i un canvi on intervenen segones derivades en l'altra component. El problema

d'aquest canvi formal és que no està clar que u_{xx} estigui definida si partim de $(u, u(1)) \in X_1 \subset H^1(0, 1) \times \mathbb{C}$. Usualment, es pensa aquesta segona derivada en l'espai $H^{-1}(0, 1)$, és a dir, l'espai dual de $H_0^1(0, 1)$. Així, u_{xx} el podem definir com l'operador sobre elements de $H_0^1(0, 1)$ que actua de la manera següent:

$$\langle u_{xx}, \varphi \rangle = - \int_0^1 u_{xx} \varphi = \int_0^1 u_x \varphi_x, \quad \forall \varphi \in H_0^1(0, 1)$$

on ara totes les derivades sí tenen sentit. D'aquí tenim que $g = v - \alpha u_{xx}$ està definit com a element de $H^{-1}(0, 1)$.

També teníem una relació entre u i v que s'haurà de traduir per les noves variables f i g : com que $(u + \alpha v) \in H^2(0, 1)$ caldrà que $f + \alpha(g + \alpha u_{xx}) \in H^2(0, 1)$. Però $f = u$, de manera que podem escriure aquesta condició com $f + \alpha(g + \alpha f_{xx}) \in H^2(0, 1)$. Amb aquestes consideracions, podem donar l'espai E on viuen aquestes noves variables, definit a partir del domini de les velles:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix}, (f, f(1)) \in X_1, g \in H^{-1}(0, 1), f + \alpha(g + \alpha f_{xx}) \in H^2(0, 1) \right\}$$

$$E \subset ((H^1(0, 1) \times \mathbb{C}) \times (H^{-1}(0, 1) \times \mathbb{C}))$$

En aquestes noves variables f i g podem escriure $A_\alpha(0)+B$ com l'operador triangular superior:

$$(A_\alpha(0)+B) \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha \partial_x^2 f + g, b) \\ (-\frac{1}{\alpha} g, 0) \end{pmatrix}$$

Si volem, per a més claredat, podem escriure l'operador anterior de forma desenvolupada:

$$\begin{pmatrix} \alpha \partial_x^2 & 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ f(1) \\ g \\ b \end{pmatrix}$$

on

$$T_1 = \begin{pmatrix} \alpha \partial_x^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } T_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El que farem és, seguint la idea de [C-SM], relacionar el conjunt resolvent i els valors propis d'un operador del tipus de T amb els de T_1, T_2 i/o T_3 . En general, tindrem que λ pertany al conjunt resolvent de $\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}$ si ens permet resoldre el problema

$$\left[\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda Id & 0 \\ 0 & \lambda Id \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

amb $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ donats. És fàcil veure que aquest problema es pot resoldre si i només si λ està en el conjunt resolvent de T_1 i en el conjunt resolvent de T_3 . Dit d'una altra manera,

$$\lambda \in \sigma \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} = \mathbb{C} \setminus \rho \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{C} \setminus (\rho(T_1) \cap \rho(T_3)) \Leftrightarrow$$

$$\lambda \notin \rho(T_1) \text{ ó } \lambda \notin \rho(T_3) \Leftrightarrow \lambda \in (\sigma(T_1) \cup \sigma(T_3))$$

Com que els punts de l'espectre del nostre operador triangular vindran de $\sigma(T_1)$ o de $\sigma(T_3)$, vegem com es comporten, en el nostre cas, els punts d'aquests espectres com a punts de $\sigma \left(\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} \right)$.

1. Si $\lambda \in \sigma(T_1)$ tenim dues opcions:

(a) $\lambda \in \sigma_p(T_1)$. En aquest cas tenim un valor propi de T_1 aïllat i de multiplicitat algebraica finita. Òbviament, seguirà essent aïllat com a punt de $\sigma(A_\alpha(0) + B)$. Només queda comprovar-ne la multiplicitat en aquest operador, però com que és triangular superior, es pot comprovar que aquesta es manté. En aquest cas, doncs, $\lambda \in \sigma_p \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}$.

(b) L'altra opció és que $\lambda \in \sigma_{ess}(T_1)$. Però, $T_1 = \begin{pmatrix} \alpha \partial_x^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que és com un laplaciana, no té espectre essencial.

2. L'altra opció és que λ provingui de $\sigma(T_3)$. Com que $T_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha}Id & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (si ens mirem els operadors de forma desenvolupada) l'únic punt de l'espectre és $-\frac{1}{\alpha}$. Si ens el mirem en l'operador $A_\alpha(0) + B$:

$$\begin{pmatrix} \alpha \partial_x^2 & 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

podem comprovar que tots els vectors de la forma

$$\begin{pmatrix} s(x) \\ 0 \\ -\frac{1}{\alpha}s(x) - \alpha s''(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

són vectors propis de valor propi $-\frac{1}{\alpha}$ de l'operador triangular, per tot $s(x)$ del domini. Per tant, $-\frac{1}{\alpha}$ té multiplicitat algebraica infinita com a punt de l'espectre de $A_\alpha(0) + B$. És a dir, pertany a l'espectre essencial de $A_\alpha(0) + B$

Pot haver-hi altres punts, en $\sigma_{ess}(A_\alpha(0) + B)$? Si fos així, en particular serien punts de l'espectre de $A_\alpha(0) + B$, i ja hem vist què passava en aquest cas.

Per tant, l'espectre essencial de l'operador pertorbat està format per un únic punt, que és $-\frac{1}{\alpha}$ □

Lema 48 *L'operador $A_\alpha(0) + B$ és una pertorbació relativament compacta de $A_\alpha(0)$.*

Demostració. Prenem un $\lambda \in \rho(A_\alpha(0))$ i considerem l'operador $(A_\alpha(0) - \lambda Id)^{-1}$, que és un operador continu de \mathcal{H} en $\mathcal{D}(A_\alpha)$. I B sobre $(A_\alpha(0) - \lambda Id)^{-1}$ actua essencialment com a la inclusió de la segona component, que està en $H^1(0, 1)$, en $L^2(0, 1)$, que és una inclusió compacta. Per tant, $A_\alpha(0) + B$ és una pertorbació relativament compacta de $A_\alpha(0)$. □

Corol.lari 49 *L'espectre essencial de l'operador no pertorbat $A_\alpha(0)$ és:*

$$\sigma_{ess}(A_\alpha(0)) = \left\{ \frac{-1}{\alpha} \right\}$$

Demostració.

Per al nostre argument utilitzarem el teorema 46 abans enunciat.

Acabem de veure que $\sigma_{ess}(A_\alpha(0) + B) = \left\{ \frac{-1}{\alpha} \right\}$. Per tant, la resta de punts del pla són *punts normals* de l'operador (recordem la definició 45). És a dir, el conjunt obert $\mathcal{U} = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{-1}{\alpha} \right\}$ conté només punts normals de $A_\alpha(0) + B$. D'altra banda, l'operador $A_\alpha(0)$ es pot pensar també com una pertorbació relativament compacta de $A_\alpha(0) + B$ (veure lema 48). Així, aplicant el teorema 46 (Henry), tindrem que el conjunt \mathcal{U} està format o bé només per valors propis de $A_\alpha(0)$ o bé només per punts normals de $A_\alpha(0)$. Òbviament només la segona opció és vàlida, ja que hem vist en l'apartat 4.1.1 que eren els valors propis de $A_\alpha(0)$. Per tan, $\sigma_{ess}(A_\alpha(0))$ ha d'estar contingut en el complementari de \mathcal{U} :

$$\sigma_{ess}(A_\alpha(0)) \subseteq \left\{ \frac{-1}{\alpha} \right\}$$

Altre cop, això ens deixa dues opcions: o bé $\sigma_{ess}(A_\alpha(0)) = \emptyset$, o bé $\sigma_{ess}(A_\alpha(0)) = \left\{ \frac{-1}{\alpha} \right\}$. Si suposem la primera, que $A_\alpha(0)$ no té espectre essencial, podem repetir l'argument anterior pensant l'operador $A_\alpha(0) + B$ com pertorbació relativament compacta de $A_\alpha(0)$. En aquest cas, l'obert escollit seria $\mathcal{U} = \mathbb{C}$, format només per punts normals de $A_\alpha(0)$, de manera que pel teorema 46 tindriem $\sigma_{ess}(A_\alpha(0) + B) = \emptyset$, que òbviament és fals. Per tant, l'única opció possible és que:

$$\sigma_{ess}(A_\alpha(0)) = \left\{ \frac{-1}{\alpha} \right\}$$

□

4.2 Pertorbació de l'espectre respecte $\varepsilon > 0$.

Ja hem vist que el sentit físic d'aquest cas és suposar una massa m prou gran en l'extrem de la molla. Matemàticament, però, pensarem aquest problema com una pertorbació del problema per $\varepsilon = 0$ i veurem que se'n mantenen els resultats principals.

4.2.1 Pertorbació del valor propi doble $\lambda = 0$ quan

$$\varepsilon \sim 0.$$

Per fer notar la dependència dels valors propis respecte del paràmetre ε , escriurem $\lambda_k(\varepsilon)$ per a referir-nos a l' k -èssim valor propi en el problema per $\varepsilon \geq 0$. Així, denotem per $\lambda_0(0) = 0$ el valor propi doble dominant quan $\varepsilon = 0$. Si pertorbem el problema considerant un $\varepsilon > 0$, potser pròxim a zero, la intuïció ens portaria a pensar que els valors propis pertorbats corresponents a $\lambda_0(0)$, que podem denotar per $\lambda_0^+(\varepsilon)$ i $\lambda_0^-(\varepsilon)$, siguin també dominants. Efectivament, és el que passarà.

Per veure-ho, comencem veient analíticament unes aproximacions de $\lambda_0(0) = 0$ quan ε és prou petit. En aquest cas recuperem el problema de referència 1.2:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \alpha u_{txx} = 0, & 0 < x < 1 \\ u(0, t) = 0 \\ u_{tt}(1, t) = -\varepsilon [u_x(1, t) + \alpha u_{tx}(1, t) + r u_t(1, t)] \end{cases}$$

on $u = u(x, t)$, $\varepsilon > 0$ i $\alpha, r > 0$. Si busquem solucions de la forma $e^{\lambda t}u(x)$, tal i com fèiem en l'apartat 2.2.2, però ara per $\alpha > 0$, obtenim com a solucions associades:

$$u(x) = e^{\sqrt{\frac{\lambda^2}{1+\lambda\alpha}}x} - e^{-\sqrt{\frac{\lambda^2}{1+\lambda\alpha}}x}$$

i els valors propis λ han de complir la següent relació:

$$e^{\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda\alpha}}} \left[\lambda + \frac{\varepsilon(1+\lambda\alpha)}{\sqrt{1+\lambda\alpha}} + \varepsilon r \right] = e^{\frac{-\lambda}{\sqrt{1+\lambda\alpha}}} \left[\lambda - \frac{\varepsilon(1+\lambda\alpha)}{\sqrt{1+\lambda\alpha}} + \varepsilon r \right] \quad (4.6)$$

Podem pensar aquesta expressió dels valors propis com una funció de (ε, λ) igualada a zero, a la qual aplicarem el teorema de la funció implícita en \mathbb{C}^2 en un entorn prou petit del punt $(\varepsilon_0, \lambda_0) = (0, 0)$, de manera que podrem expressar ε com a funció de λ en un entorn del valor propi doble dominant.

Per tant, tenim ε com a funció holomorfa de λ :

$$\varepsilon = \varepsilon(\lambda) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \lambda + \varepsilon_2 \lambda^2 + o(\lambda^3)$$

Sabem que l'entorn on això és cert és un entorn de $(\varepsilon_0, \lambda_0) = (0, 0)$, de manera que forçosament $\varepsilon_0 = 0$. A partir d'aquí, si substituïm aquesta expressió en 4.6, on haurem escrit cada terme com la sèrie de Taylor en λ , entorn de $\lambda = 0$, obtenim que:

$$\varepsilon_1 = 0$$

i

$$\varepsilon_2 = -1$$

Així, podem pensar ε com

$$\varepsilon(\lambda) = -\lambda^2 + o(\lambda^3)$$

i, traient factor comú a λ^2 , podem pensar-ho com:

$$-\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 \varphi(\lambda)$$

on $\varphi(\lambda) = 1 + o(\lambda)$. Si fem el canvi de variables $\delta = \lambda \sqrt{\varphi(\lambda)}$, tenim $-\varepsilon = \delta^2$ i λ en funció de δ .

Per tant, podem repetir l'argument i tenim:

$$\lambda = \lambda(\delta) = \lambda_0 + \lambda_1 \delta + \lambda_2 \delta^2 + o(\delta^3)$$

d'on sabem ja que $\lambda_0 = 0$ pel mateix motiu que abans. Amb aquesta apreciació i pensant l'equació 4.6 com a productes de sèries de Taylor en la variable δ , els càlculs ens porten a trobar el valor, per exemple, dels dos primers coeficients de λ , obtenint les següents aproximacions d'ordre 1 per a les pertorbacions respecte δ del valor propi doble $\lambda_0(0)$, que és:

$$\lambda(\delta) = \delta + \frac{\frac{\alpha}{2} + r}{2} \delta^2 + o(\delta^3)$$

Però hem vist que $-\varepsilon = \delta^2$ o, equivalentment, $\lambda = \lambda(\pm i\sqrt{\varepsilon})$ ja que $\varepsilon > 0$. Per tant, l'anterior expressió la podem posar en termes de ε , obtenint les següents aproximacions d'ordre 1 per a les pertorbacions respecte ε del valor propi doble $\lambda_0(0)$, que són:

$$\lambda_0^+(i\sqrt{\varepsilon}) = i\sqrt{\varepsilon} + \frac{\alpha + r}{2}(i\sqrt{\varepsilon})^2 + o(i\sqrt{\varepsilon})^3 = \frac{-\alpha - r}{2} \varepsilon + i\sqrt{\varepsilon} + o((i\sqrt{\varepsilon})^3) \quad (4.7)$$

i el conjugat:

$$\lambda_0^-(i\sqrt{\varepsilon}) = -i\sqrt{\varepsilon} + \frac{\alpha + r}{2}(i\sqrt{\varepsilon})^2 + o(i\sqrt{\varepsilon})^3 = \frac{-\alpha - r}{2} \varepsilon - i\sqrt{\varepsilon} + o((i\sqrt{\varepsilon})^3) \quad (4.8)$$

Observem que en fer $\varepsilon = 0$ recuperem el valor propi doble $\lambda_0(0) := \lambda_0^+(0) = \lambda_0^-(0)$.

Així, el valor propi doble pel cas $\varepsilon = 0$ s'ha desdoblant en dos nous valors propis (complexos conjugats) quan pensem ε propera a zero. Ara que sabem com es pertorba el valor propi $\lambda_0(0) = 0$, veurem que no perd el fet de ser dominant respecte la resta de l'espectre.

4.2.2 Espectre essencial de $A_\alpha(\varepsilon)$.

Si veiem que $A_\alpha(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ és una pertorbació relativament compacta de l'operador tancat $A_\alpha(0)$, el teorema 46 ens garanteix que l'espectre essencial no canviarà.

Teorema 50 *L'espectre essencial de l'operador $(A_\alpha(\varepsilon), \mathcal{D}(A_\alpha))$, $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ és:*

$$\sigma_{ess}(A_\alpha(\varepsilon)) = \left\{ \frac{-1}{\alpha} \right\}$$

Demostració.

L'operador $A_\alpha(\varepsilon)$ el podem descomposar de la manera següent:

$$A_\alpha(\varepsilon) \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} = (A_\alpha(0) + B) \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v, v(1)) \\ (u_{xx} + \alpha v_{xx}, 0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (0, 0) \\ (0, -\varepsilon [u_x(1) + \alpha v_x(1) + r v(1)]) \end{pmatrix}$$

Observem que B és un operador de rang finit, de domini tot l'espai \mathcal{H} . En particular, $\mathcal{D}(A_\alpha(0)) \subset \mathcal{D}(B) = \mathcal{H}$. Així, la composició $B(A_\alpha(0) - \lambda_0 Id)^{-1}$ amb $\lambda_0 \in \rho(A_\alpha(0))$ ens porta a:

$$\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{D}(A_\alpha) \hookrightarrow \mathcal{H}$$

on $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{D}(A_\alpha)$ inclusió contínua perquè $(A_\alpha(0) - \lambda_0 Id)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{D}(A_\alpha))$ $\forall \lambda_0 \in \rho(A_\alpha(0))$; i on la segona inclusió és compacta ja que B és un operador de rang finit i, en particular, compacte.

Així, l'operador B és una pertorbació relativament compacta de $A_\alpha(0)$, de manera que seguint el mateix raonament fet en el corollari 49, podem afirmar que:

$$\sigma_{ess}(A_\alpha(\varepsilon)) = \sigma_{ess}(A_\alpha(0)) = \left\{ \frac{-1}{\alpha} \right\}$$

□

4.2.3 Rang numèric i valors propis dominants.

Situarem els valors propis en un sector que no dependrà de ε . Amb l'ajut de teoria de pertorbacions, veurem que $\lambda_0^+(\varepsilon)$ i $\lambda_0^-(\varepsilon)$, aproximacions que tenen sentit per ε pròxim a zero, són els valors propis més a la dreta de tots. I si ε prou petit, també estaran a la dreta de l'espectre essencial, $\left\{ \frac{-1}{\alpha} \right\}$, ja que $\alpha > 0$ està fixada. De manera que el que seria esperable, passa: la pertorbació del valor propi dominant per $\varepsilon = 0$ és també valor propi dominant per ε prou proper a zero (i veurem amb exactitud què vol dir aquest *prou proper*).

En aquest apartat, doncs, serà important l'eina que ens donarà el sector independent de ε que, sota certes hipòtesis, contindrà l'espectre de tots els $A_\alpha(\varepsilon)$: el *rang numèric*. Seguirem la definició i teoremes del capítol V.3 del Kato [K].

Definició 51 *Sigui T un operador en \mathcal{H} . El **rang numèric** ó $\Theta(T)$ és el subconjunt del pla complex següent:*

$$\Theta(T) = \{ \langle Tu, u \rangle \in \mathbb{C}, u \in \mathcal{D}(T), \|u\|_{\mathcal{H}} = 1 \}$$

Observació 52 *Tot i que podríem usar el fet que els operadors generen un semigrup analític per $\varepsilon > 0$ per a buscar el sector que contindria l'espectre de*

cada operador, tindriem el problema que els sectors, possiblement, dependrien de ε .

Definició 53 *Sigui Γ la clausura de $\Theta(T)$. Definim el conjunt Δ com el complementari de Γ :*

$$\Delta = \mathbb{C} \setminus \Gamma$$

Proposició 54 (Kato, [K]) *El rang numèric és un conjunt convex. Per tant, Δ és un conjunt obert o bé connex o bé amb dues components connexes Δ_1 i Δ_2 (en el cas en què Γ sigui una banda vertical).*

El que ens interessarà a nosaltres per a relacionar aquests conjunts amb l'espectre és el següent resultat del Kato.

Teorema 55 (Kato, [K]) *Sigui T un operador tancat de \mathcal{H} . Per a qualsevol $\xi \in \Delta$, la codimensió de $R(T - \xi)$ és constant $\forall \xi \in \Delta$ (o bé en cada component de Δ). Aquest valor constant s'anomena l'**índex de deficiència de T** ($\text{def}(T - \xi)$). En el cas que $\text{def}(T - \xi) = 0$ per a algun $\xi \in \Delta$ llavors Δ és un subconjunt del conjunt resolvent de T (els resultat és anàleg quan Δ té dues components).*

Comencem, doncs, trobant el rang numèric dels nostres operadors $\Theta(A_\alpha(\varepsilon))$, $\varepsilon > 0$. Recordem qui era aquest operador, ja definit en el capítol 3:

$$A_\alpha(\varepsilon)V = \begin{pmatrix} (v, v(1)) \\ ((u + \alpha v)_{xx}, -\varepsilon u_x(1) - \varepsilon \alpha v_x(1) - \varepsilon r v(1)) \end{pmatrix}$$

amb domini

$$\mathcal{D}(A_\alpha(\varepsilon)) = \mathcal{D}(A_\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in X_1 \times X_1, (u + \alpha v) \in X_2 \right\} \subset \mathcal{H}$$

Per tant, tenim:

$$\langle A_\alpha(\varepsilon)V, V \rangle_{\mathcal{H}} =$$

$$-\alpha \int_0^1 |v_x|^2 - r|v(1)|^2 - 2i \text{Im} \int_0^1 u_x \overline{v_x}$$

i això per a tots els $V \in \mathcal{D}(A_\alpha(\varepsilon))$ tals que $\|V\|_{\mathcal{H}} = 1$

Si ens mirem la part real i la part imaginària del producte escalar, que pensarem com un complex μ , i les comparem, usant que $\|V\|_{\mathcal{H}} = 1$, tenim:

$$|Im \mu| = 2 |Im \int_0^1 u_x \overline{v_x}| \leq 2 \left(\int_0^1 |v_x|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

i, per tant, tot $\mu \in \Theta(A_\alpha(\varepsilon))$ verifica que:

$$|Im \mu| \leq 2 \left| \left(\frac{-Re \mu - r|v(1)|^2}{\alpha} \right) \right|^{\frac{1}{2}}$$

És a dir, el rang numèric està *contingut* en el *sector parabòlic*

$$S_\alpha = \{y = \pm 2\sqrt{\frac{-x}{\alpha}}, x < 0\}$$

(veure figura 4.5).

No donem exactament qui és aquest rang numèric, però aquesta localització serà suficient per a l'ús que en farem.

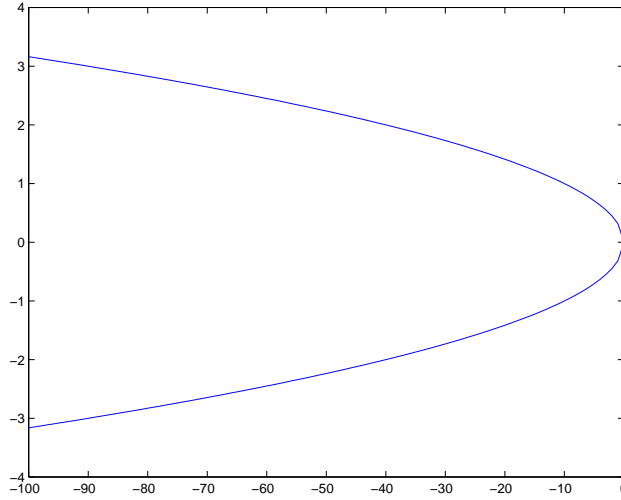


Figura 4.5: Sector que conté el rang numèric per $\alpha = 0.04$.

Teorema 56 *L'espectre dels operadors $A_\alpha(\varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ està contingut en el sector $S_\alpha = \left\{ y = \pm 2\sqrt{\frac{-x}{\alpha}}, x < 0 \right\}$, que no depèn de ε .*

Demostració.

Ja hem vist que $\Theta(A_\alpha(\varepsilon))$ està contingut en aquest sector $\forall \varepsilon > 0$, de manera que només queda veure que l'espectre està en el rang numèric comprovant les hipòtesis del teorema 55: observem que $\xi = 1$ no està en el rang numèric, així que comprovarem l'índex de deficiència és 0 veient que $R(A_\alpha(\varepsilon) - Id) = \mathcal{H}$.

Si ens mirem com actua aquest nou operador aplicat sobre un element V qualsevol de $\mathcal{D}(\mathcal{H})$, tenim:

$$(A_\alpha(\varepsilon) - Id)V = \begin{pmatrix} (v - u, v(1) - u(1)) \\ ((u + \alpha v)_{xx} - v, -\varepsilon [u_x(1) + \alpha v_x(1) + r v(1)] - v(1)) \end{pmatrix}$$

que, efectivament, està en $\mathcal{H} = X_1 \times X_0$. Per a veure que el rang és complet, prenem un element qualsevol de l'espai total, $F = \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ i hem de trobar $V = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ tal que $(A_\alpha(\varepsilon) - Id)V = F$. Si escrivim aquesta igualtat terme a terme, aquesta es tradueix en resoldre el problema següent:

$$(4.9) \quad \begin{cases} v - u = f \\ v(1) - u(1) = f(1) \\ u_{xx} + \alpha v_{xx} - v = g \\ -\varepsilon [u_x(1) + \alpha v_x(1) + r v(1)] - v(1) = b \end{cases}$$

amb $(f, f(1)) \in X_1$, $g \in L^2(0, 1)$, $b \in \mathbb{C}$ donats i $u(0) = v(0) = 0$. Mitjançant dos canvis de variable es pot veure que aquest problema té solució única en l'espai que volem. Definirem en primer lloc una nova variable $w = u + \alpha v$. Amb aquesta notació, podem expressar $v = \frac{w - u}{\alpha}$ i així el problema es transforma en:

$$(4.10) \quad \begin{cases} \frac{w-u}{\alpha} - u = f \\ \frac{w(1)-u(1)}{\alpha} - u(1) = f(1) \\ w_{xx} - \frac{w-u}{\alpha} = g \\ -\varepsilon \left[w_x(1) + \frac{r}{\alpha}(w(1)-u(1)) \right] - \frac{w(1)-u(1)}{\alpha} = b \end{cases}$$

i w també verifica que $w(0) = 0$. Utilitzem ara la primera equació per a fer el nou canvi de variable $u = \frac{w - \alpha f}{1 + \alpha}$ i expressar el problema en termes d'una única incògnita, w . Així, hem de resoldre:

$$(4.11) \quad \begin{cases} w_{xx} - \frac{w}{1+\alpha} = g + \frac{f}{1+\alpha} \\ w(0) = 0 \\ -\varepsilon w_x(1) - \frac{1+\varepsilon r}{1+\alpha} w(1) = b + \frac{1+\varepsilon r}{1+\alpha} f(1) \end{cases}$$

Com que $g + \frac{f}{1+\alpha} \in L^2(0,1)$, existeix una única $w \in H^2(0,1)$ solució del problema anterior. Si recuperem les nostres incògnites inicials:

$$V = \begin{pmatrix} u, & u(1) \\ v, & v(1) \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\alpha} \begin{pmatrix} w - \alpha f, & w(1) - \alpha f(1) \\ w + f, & w(1) + f(1) \end{pmatrix}$$

tenim que, efectivament, V està en $\mathcal{D}(A_\alpha(\varepsilon))$.

Com que hem vist que el rang de l'operador $A_\alpha(\varepsilon) - Id$ és complet, el teorema de Kato 55 ens garanteix que l'espectre de $A_\alpha(\varepsilon)$ està contingut en $\Theta(A_\alpha(\varepsilon))$. □

Observació 57 *Seria raonable plantejar-nos l'ús del rang numèric per a trobar un conjunt independent de α que inclogués l'espectre de A_α per $\alpha > 0$,*

enlloc de pensar-lo en un sector dependent de α , tal i com hem fet en el capítol 3. El problema és que acabem de veure que aquest sector depèn de α . De fet, per α cada cop més petits, l'angle del sector seria cada cop més gran, arribant a ser tot el semiplà negatiu en el cas límit $\alpha = 0$. És a dir, l'ús del rang numèric no ens dóna, en aquest cas, cap informació que no es pugui derivar del fet que un semigrup analític té l'espectre contingut en un cert sector.

Tot això ho hem fet per a tenir localitzat l'espectre de $A_\alpha(\varepsilon)$, $\alpha, \varepsilon > 0$. Però el nostre objectiu continua essent demostrar que $A_\alpha(\varepsilon)$ té un subconjunt finit de valors propis dominants i que aquests són $\lambda_0^+(\varepsilon)$ i $\lambda_0^-(\varepsilon)$. El resultat principal que usarem per a demostrar-ho és el teorema 34 (al capítol 3), un teorema de pertorbació de Kato, i el raonament que hem fet partint d'aquest teorema en l'apartat 3.2.2, també seguint el [K]. Essencialment, aquest teorema ens permetia parlar de continuïtat respecte un cert paràmetre de conjunts finits de valors propis si l'operador pertorbat convergia en sentit generalitzat al no pertorbat. Per tant, el primer que veurem és aquesta convergència en sentit generalitzat dels operadors.

Teorema 58 $A_\alpha(\varepsilon)$ convergeix en sentit generalitzat a $A_\alpha(0)$ quan $\varepsilon \rightarrow 0$, per $\alpha > 0$ fixat.

Demostració. És, essencialment, una demostració tècnica que consisteix en acotar la norma d'un operador diferència per una constant que tendirà a zero quan $\varepsilon \rightarrow 0$ (recordem la definició 29 de convergència generalitzada, al capítol 3, i les propietats equivalents que ens donava el lema 30).

El primer problema és, però, que $A_\alpha(0)$ no és un operador invertible. Així, no podem veure la convergència en sentit generalitzat de $A_\alpha(\varepsilon)$ a $A_\alpha(0)$ directament; però que aquesta convergència és certa és equivalent a comprovar la convergència en sentit generalitzat d'uns operadors *traslladats*, que sí seran invertibles si els traslladem convenientment. En el nostre cas, comprovarem que:

$$(A_\alpha(\varepsilon) - Id) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (A_\alpha(0) - Id)$$

en sentit generalitzat veient que

$$\|(A_\alpha(\varepsilon) - Id)^{-1} - (A_\alpha(0) - Id)^{-1}\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (4.12)$$

Com a incís direm que en [K] es pot veure com efectivament, les pertorbacions acotades dels operadors mantenen la convergència en sentit generalitzat

d'aquests. Intuïtivament, aquesta equivalència és clara, ja que en restar-los la identitat l'únic que hem fet és traslladar les gràfiques, que és el que ens donava la mesura de la convergència generalitzada.

Vegem la convergència generalitzada dels operadors traslladats.

1. $A_\alpha(\varepsilon) - Id$ i $A_\alpha(0) - Id$ són operadors tancats.
2. Els inversos existeixen i són operadors continus ja que 1 no pertany ni a $\sigma(A_\alpha(\varepsilon))$ ni a $\sigma(A_\alpha(0))$. Tot i això, ens interessarà trobar aquests inversos. De fet, acabem de veure la manera d'invertir-los, però ho tornarem a escriure per clarificar les notacions. Per $\begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ i $\varepsilon > 0$ fixats, definim l'operador:

$$(A_\alpha(\varepsilon) - Id)^{-1} \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix}$$

amb

$$\begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + \alpha} \begin{pmatrix} (w^\varepsilon - \alpha f, w^\varepsilon(1) - \alpha f(1)) \\ (w^\varepsilon + f, w^\varepsilon(1) + f(1)) \end{pmatrix}$$

on w^ε és la solució del problema:

$$(4.13) \quad \begin{cases} w^\varepsilon_{xx} - \frac{w^\varepsilon}{1 + \alpha} = g + \frac{f}{1 + \alpha} \\ w^\varepsilon(0) = 0 \\ -\varepsilon w^\varepsilon_x(1) - \frac{1 + \varepsilon r}{1 + \alpha} w^\varepsilon(1) = b + \frac{1 + \varepsilon r}{1 + \alpha} f(1) \end{cases}$$

Aquest problema té solució única en $H^2(0, 1)$, de manera que $(A_\alpha(\varepsilon) - Id)^{-1}$ està ben definit com a operador de \mathcal{H} en $\mathcal{D}(A_\alpha)$; i es pot comprovar que és l'invers de $A_\alpha(\varepsilon) - Id$.

Anàlogament, definim l'invers de $(A_\alpha(0) - Id)^{-1}$ com:

$$(A_\alpha(0) - Id)^{-1} \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + \alpha} \begin{pmatrix} (w^0 - \alpha f, w^0(1) - \alpha f(1)) \\ (w^0 + f, w^0(1) + f(1)) \end{pmatrix}$$

on w^0 és la solució del problema:

$$(4.14) \quad \begin{cases} w^0_{xx} - \frac{w^0}{1+\alpha} = g + \frac{f}{1+\alpha} \\ w^0(0) = 0 \\ -\frac{1}{1+\alpha} w^0(1) = b + \frac{1}{1+\alpha} f(1) \end{cases}$$

També té solució única en $H^2(0, 1)$, de manera que l'operador està ben definit i és, efectivament, l'invers.

3. Per acotar la norma de l'operador diferència dels inversos, vegem primer com actua aquest operador sobre un element $\begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ qualsevol. És directe veure que:

$$\begin{aligned} & [(A_\alpha(\varepsilon) - Id)^{-1} - (A_\alpha(0) - Id)^{-1}] \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} = \\ & \frac{1}{1+\alpha} \begin{pmatrix} (w^\varepsilon - w^0, (w^\varepsilon - w^0)(1)) \\ (w^\varepsilon - w^0, (w^\varepsilon - w^0)(1)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si diem $w := w^\varepsilon - w^0$, el que tenim és que w és la solució de:

$$(4.15) \quad \begin{cases} w_{xx} - \frac{1}{1+\alpha} w = 0 \\ w(0) = 0 \\ -\varepsilon w_x(1) - \frac{1+\varepsilon r}{1+\alpha} w(1) = \\ \varepsilon w_x^0(1) + \frac{\varepsilon r}{1+\alpha} (w^0(1) + f(1)) \end{cases}$$

on w^0 és la solució de l'equació 4.14. Es pot comprovar que 4.15 té solució única en $H^2(0, 1)$. Trobar la norma de l'operador diferència dels inversos és trobar una constant $C > 0$ tal que:

$$\frac{1}{(1+\alpha)^2} \left(\int_0^1 |w_x|^2 + \int_0^1 |w|^2 + \frac{1}{\varepsilon} |w(1)|^2 \right) \leq C \left(\int_0^1 |f_x|^2 + \int_0^1 |g|^2 + \frac{1}{\varepsilon} |b|^2 \right) \quad (4.16)$$

De fet, el que veurem és que aquesta constant està acotada per una altra $C(\varepsilon)$ que depèn de ε i que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C(\varepsilon) = 0$. Per tant $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C = 0$, amb la qual cosa haurem comprovat la convergència generalitzada dels operadors corresponents. Aquesta demostració, molt tècnica, la resumim en els dos passos principals:

(a) Veurem que

$$\frac{1}{(1+\alpha)^2} \left(\int_0^1 |w_x|^2 + \int_0^1 |w|^2 + \frac{1}{\varepsilon} |w(1)|^2 \right) \leq \frac{\varepsilon(1+\alpha)}{1+\varepsilon r} |K(w^0)|^2$$

on $K(w^0)$ serà una constant que dependrà de w^0 . Observem que com que w^0 és solució de 4.14, on no intervé ε , $K(w^0)$ és una constant que no dependrà de ε .

(b) Veurem que existeix una constant K tal que

$$|K(w^0)|^2 \leq K \left\| \begin{pmatrix} f & f(1) \\ g & b \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}$$

Per tant, haurem vist que $C \leq C(\varepsilon) = \frac{\varepsilon(1+\alpha)}{1+\varepsilon r} K$. Com que K no depèn de ε és evident que $C(\varepsilon) \rightarrow 0$ quan $\varepsilon \rightarrow 0$, de manera que

$$\left\| [(A_\alpha(\varepsilon) - Id)^{-1} - (A_\alpha(0) - Id)^{-1}] \right\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Vegem la primera part:

(a) Multiplicant l'equació del problema 4.15 per \bar{w} i integrant per parts, tenim:

$$\int_0^1 |w_x|^2 + \frac{1}{1+\alpha} \int_0^1 |w|^2 = w_x(1) \overline{w(1)} \quad (4.17)$$

Però $w_x(1)$ intervé en les condicions de contorn del problema 4.15, d'on:

$$w_x(1) \overline{w(1)} = \left[-w_x^0(1) - \frac{r}{1+\alpha} w^0(1) - \frac{r}{1+\alpha} f(1) - \frac{1+\varepsilon r}{\varepsilon(1+\alpha)} w(1) \right] \overline{w(1)}$$

A partir d'ara, $K(w^0) := w_x^0(1) + \frac{r}{1+\alpha}w^0(1) + \frac{r}{1+\alpha}f(1)$. Amb aquesta notació, 4.17 equival a:

$$\int_0^1 |w_x|^2 + \frac{1}{1+\alpha} \int_0^1 |w|^2 + \frac{1+\varepsilon r}{\varepsilon(1+\alpha)} |w(1)|^2 \leq |K(w^0)| |w(1)| \quad (4.18)$$

Mirem-nos 4.18 amb deteniment. Si la suma de termes positius és menor o igual que una quantitat, també serà veritat per cadascun dels termes. En particular:

$$\frac{1+\varepsilon r}{\varepsilon(1+\alpha)} |w(1)|^2 \leq |K(w^0)| |w(1)|$$

d'on:

$$|w(1)| \leq \frac{\varepsilon(1+\alpha)}{1+\varepsilon r} |K(w^0)|$$

D'aquesta manera, l'expressió 4.18 equival a:

$$\int_0^1 |w_x|^2 + \frac{1}{1+\alpha} \int_0^1 |w|^2 + \frac{1+\varepsilon r}{\varepsilon(1+\alpha)} |w(1)|^2 \leq \frac{\varepsilon(1+\alpha)}{1+\varepsilon r} |K(w^0)|^2 \quad (4.19)$$

Observem, però, que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1+\alpha)^2} \left(\int_0^1 |w_x|^2 + \int_0^1 |w|^2 + \frac{1}{\varepsilon} |w(1)|^2 \right) \leq \\ & \int_0^1 |w_x|^2 + \frac{1}{1+\alpha} \int_0^1 |w|^2 + \frac{1+\varepsilon r}{\varepsilon(1+\alpha)} |w(1)|^2 \end{aligned}$$

I, si ho ajuntem amb 4.19, ja tenim el que volíem:

$$\frac{1}{(1+\alpha)^2} \left(\int_0^1 |w_x|^2 + \int_0^1 |w|^2 + \frac{1}{\varepsilon} |w(1)|^2 \right) \leq \frac{\varepsilon(1+\alpha)}{1+\varepsilon r} |K(w^0)|^2 \quad (4.20)$$

Vegem la segona part.

(b) Per acotar $K(w^0) = w_x^0(1) + \frac{r}{1+\alpha}w^0(1) + \frac{r}{1+\alpha}f(1)$ per termes de $\left\| \begin{pmatrix} f & f(1) \\ g & b \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}$ haurem de fer diverses acotacions.

i. És evident que $|f(1)|$ el podem acotar convenientment. De fet, com que $f(0) = 0$, és immediata la desigualtat:

$$|f(1)| \leq \left(\int_0^1 |f_x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.21)$$

ii. Mirem-nos $|w_x^0(1)|$. Com que $w^0 \in H^2(0, 1)$, fàcilment comprovem que

$$|w_x^0(1)| \leq \|w_x^0\|_{L^2}^2 + \|w_{xx}^0\|_{L^2}^2 \quad (4.22)$$

Per a treballar $\|w_x^0\|_{L^2}$, usarem un problema auxiliar. Sigui w^{aux} la solució de:

$$(4.23) \quad \begin{cases} w^{aux}_{xx} - \frac{w^{aux}}{1+\alpha} = 0 \\ w^{aux}(0) = 0 \\ w^{aux}(1) = -(1+\alpha)b - f(1) \end{cases}$$

De fet, podem trobar w^{aux} explícitament.

$$w^{aux}(x) = - \frac{(1+\alpha)b + f(1)}{\sinh \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}} \sinh \frac{x}{\sqrt{1+\alpha}}$$

I treballem ara amb la nova funció $w^1 := w^0 - w^{aux}$, que és solució del mateix problema que w^0 , el 4.14, però amb condicions de contorn Dirichlet homogènies:

$$(4.24) \quad \begin{cases} w^1_{xx} - \frac{w^1}{1+\alpha} = g + \frac{f}{1+\alpha} \\ w^1(0) = 0 \\ w^1(1) = 0 \end{cases}$$

En aquesta nova equació podrem fer unes acotacions que ens aniran bé per aconseguir el nostre objectiu. Multiplicant l'equació per $-\overline{w^1}$ i integrant per parts, obtenim la següent desigualtat per a la nova funció:

$$\int_0^1 |w_x^1|^2 + \frac{1}{1+\alpha} \int_0^1 |w^1|^2 \leq \left\| g + \frac{f}{1+\alpha} \right\|_{L^2} \|w^1\|_{L^2} \quad (4.25)$$

Usant la desigualtat genèrica que ja havíem utilitzat en anteriors acotacions:

$$ab \leq \frac{1}{2c^2} a^2 + \frac{c^2}{2} b^2, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (4.26)$$

(l'aplicarem sovint, triant la c que més ens convingui cada vegada) tenim en aquest cas:

$$\left\| g + \frac{f}{1+\alpha} \right\|_{L^2} \|w^1\|_{L^2} \leq \frac{1}{2c^2} \left\| g + \frac{f}{1+\alpha} \right\|_{L^2}^2 + \frac{c^2}{2} \|w^1\|_{L^2}^2$$

Prenent $c = \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}}$ aconseguim que se'ns anul·lin els termes amb $\|w^1\|_{L^2}^2$, i ajuntant-ho amb la desigualtat 4.25 podem arribar a:

$$\int_0^1 |w_x^1|^2 \leq \frac{1+\alpha}{2} \int_0^1 |g|^2 + \frac{C}{2(1+\alpha)} \int_0^1 |f_x|^2 \quad (4.27)$$

on $C > 0$ és la constant del lema 6, del capítol 2.

D'altra banda, està clar que podem acotar $\int_0^1 |w_x^{aux}|^2$ en termes que ens interessin, ja que la tenim explícitament:

$$\int_0^1 |w_x^{aux}|^2 \leq k_1 |b|^2 + k_2 \int_0^1 |f_x|^2 \quad (4.28)$$

on $k_1, k_2 > 0$ són constants que no entrarem a determinar. Usant les desigualtats 4.27 i 4.28 i recordant que $w^0 = w^1 + w^{aux}$, podem acotar $\int_0^1 |w_x^0|^2$:

$$\int_0^1 |w_x^0|^2 \leq 2 \int_0^1 |w_x^1|^2 + 2 \int_0^1 |w^{aux}|^2 \leq$$

$$(1 + \alpha) \int_0^1 |g|^2 + \left(\frac{C}{1 + \alpha} + 2k_2 \right) \int_0^1 |f_x|^2 + 2k_1 |b|^2$$

Podem resumir aquesta desigualtat prenent k_3 com el màxim d'aquestes constants, de manera que:

$$\int_0^1 |w_x^0|^2 \leq k_3 \left(\int_0^1 |g|^2 + \int_0^1 |f_x|^2 + |b|^2 \right) \quad (4.29)$$

iii. Ens quedaria acotar $\int_0^1 |w_{xx}^0|^2$, cosa que resulta directa usant el problema 4.14:

$$\int_0^1 |w_{xx}^0|^2 \leq \frac{C}{1 + \alpha} \int_0^1 |w_x^0|^2 + \int_0^1 |g|^2 + \frac{C}{1 + \alpha} \int_0^1 |f_x|^2 \quad (4.30)$$

on $C > 0$ torna a ser la constant del lema 6.

iv. Amb el que hem vist, podem acotar $|w_x^0(1)|$. La idea és usar que per a qualsevol funció $f, f' \in L^2(0, 1)$ es té que $|f(x_0)| \leq \|f\|_{L^2}^2 + \|f'\|_{L^2}^2, \forall x_0 \in (0, 1)$. Així,

$$|w_x^0(1)| \leq \int_0^1 |w_x^0|^2 + \int_0^1 |w_{xx}^0|^2$$

tal i com ja havíem indicat al principi.

Si usem les acotacions 4.29 i 4.30 i escollint k_4 com el màxim de totes les constants que intervenen podem escriure que:

$$|w_x^0(1)| \leq k_4 \left(\int_0^1 |g|^2 + \int_0^1 |f_x|^2 + |b|^2 \right) \quad (4.31)$$

v. Mirem-nos $|w^0(1)|$. De les condicions de contorn del problema 4.14 veiem que:

$$|w^0(1)| \leq (1 + \alpha) |b| + |f(1)| \quad (4.32)$$

Tot el que hem vist era per acotar $|K(w^0)|$. Però,

$$|K(w^0)| \leq |w_x^0(1)| + \frac{r}{1 + \alpha} |w^0(1)| + \frac{r}{1 + \alpha} |f(1)|$$

que són termes que ja hem treballat. Per les desigualtats 4.21, 4.31 i 4.32 podem afirmar que existeix una constant $K > 0$ tal que:

$$|K(w^0)|^2 \leq K \left(\int_0^1 |g|^2 + \int_0^1 |f_x|^2 + |b|^2 \right) = K \left\| \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}$$

que és el que volíem veure.

Podem concloure, doncs, que $A_\alpha(\varepsilon)$ convergeix a $A_\alpha(0)$ en sentit generalitzat quan $\varepsilon \rightarrow 0$, per $\alpha > 0$ fixat.

□

Teorema 59 *Existeix un cert $\varepsilon_0 > 0$ per al qual l'operador $(A_\alpha(\varepsilon), \mathcal{D}(A_\alpha))$, amb $\alpha > 0$ fixat i $\varepsilon < \varepsilon_0$, admet $\{\lambda_0^+(\varepsilon), \lambda_0^-(\varepsilon)\}$ (pertorbacions del valor propi doble $\lambda_0(0) = 0$) com a subconjunt finit de valors propis dominants.*

Demostració. Degut a la convergència generalitzada dels operadors, sabem que si tanquem un nombre finit de valors propis de $A_\alpha(0)$ en una corba Γ , hi haurà un ε prou petit a partir del qual tots els $A_\alpha(\varepsilon)$ tindran allà dins el mateix nombre de valors propis (amb multiplicitat) que $A_\alpha(0)$ (veure el teorema de semicontinuitat 34 i l'apartat 3.2.2). Així només caldrà escollir la corba adequada per a concloure el que volem.

Tenim $\alpha > 0$ fixat. Sigui R_α un rectangle de centre $(0, 0)$ amb les propietats següents. L'amplada ha de ser prou petita com perquè els únics valors propis de $A_\alpha(0)$ que contingui aquest rectangle R_α sigui $\lambda_0(0) = 0$ (que, recordem, té multiplicitat algebraica igual a 2), i també prou petita com perquè $\frac{-1}{\alpha} \notin R_\alpha$. Si repassem com són els valors propis de $A_\alpha(0)$, veurem que això queda garantit sempre que triem una amplada menor que $2 \min \left\{ \frac{1}{\alpha}, \frac{\alpha \pi^2}{2} \right\}$.

Un cop tenim l'amplada, ens mirem la franja vertical entorn l'origen que li correspon, F_α : en aquesta franja, el sector parabòlic S_α té una alçada màxima. Doncs considerarem un rectangle R_α d'alçada superior a aquesta.

Un rectangle R_α qualsevol, d'aquestes característiques, ens permet triar Γ_α com la corba tancada que en defineix la vora. Aquesta serà la corba vàlida. El teorema 34 de semicontinuitat de Kato (al capítol 3) ens garanteix que existeix un ε_0 proper a zero tal que si $\varepsilon < \varepsilon_0$ llavors $A_\alpha(\varepsilon)$ té exactament 2 valors propis allà dins, ja que dins Γ_α l'únic valor propi de $A_\alpha(0)$ és $\lambda_0(0) = 0$,

de multiplicitat 2. Observem que el teorema de la funció implícita ens havia permès trobar-los: $\lambda_0^+(\varepsilon)$ i $\lambda_0^-(\varepsilon)$, si ε_0 és prou petit com per a poder treballar en l'entorn que ens dóna el teorema de la funció implícita (si no és així, escollim el mínim i ja està).

Podem dir també que en la franja vertical F_α no hi ha més espectre de $A_\alpha(\varepsilon)$, ja que tota la part de F_α que no està continguda en R_α està fora del sector S_α , on viu aquest espectre (recordem que hem escollit R_α amb prou alçada com perquè això sigui així). Per tant, garantim que no tenim elements de l'espectre de $A_\alpha(\varepsilon)$ amb part real igual o superior a la dels valors propis de dins R_α . I amb l'espectre essencial tampoc tenim problemes, perquè hem triat Γ_α per tal que $\frac{-1}{\alpha}$ n'estigui a l'esquerra.

En resum, $Re(\lambda_0^+(\varepsilon)) = Re(\lambda_0^-(\varepsilon)) \geq Re \lambda$ per a tot $\lambda \in \sigma(A_\alpha(\varepsilon))$ si $\varepsilon < \varepsilon_0$. És a dir, si $\varepsilon < \varepsilon_0$, l'operador $A_\alpha(\varepsilon)$ té $\{\lambda_0^+(\varepsilon), \lambda_0^-(\varepsilon)\}$ com a subconjunt finit de valors propis dominants. Dit d'una altra manera, si ε és prou petit, les pertorbacions del valor propi doble dominant de $A_\alpha(0)$ són també valors propis dominants de l'operador pertorbat $A_\alpha(\varepsilon)$, de manera que pertorbacions petites de l'operador $A_\alpha(0)$ mantenen el caràcter dominant d'aquests conjunts de valors propis. \square

Observació 60 *Observem que la corba Γ_α que hem triat per a fer aquest argument no ens depèn de ε i, per tant, serà universal per a tots els $A_\alpha(\varepsilon)$ si $\varepsilon < \varepsilon_0$. Però aquesta corba sí depèn de l' $\alpha > 0$ fixat i, per tant, també en depèn el ε_0 ja que, recordem el teorema 34, ε_0 ens depèn de la corba que escollim.*

Observació 61 *Si la corba Γ_α que escollim admet més valors propis de $A_\alpha(0)$ en el seu interior, a part de $\lambda_0(0) = 0$, el mateix argument ens permet concloure que també hi haurà un subconjunt finit de valors propis dominants en aquest cas, que potser no seran $\lambda_0^+(\varepsilon)$ i $\lambda_0^-(\varepsilon)$.*

El que intuïtivament passarà és que no caldrà un ε_0 tan petit com en el cas anterior per a tenir valors propis dominants que no siguin les pertorbacions de $\lambda_0(0) = 0$. És a dir, a partir d'un cert ε'_0 ja podrem garantir l'existència d'un subconjunt finit de valors propis dominants i si, a més, ens quedem amb un $\varepsilon < \varepsilon_0$, podrem garantir que els dominants de l'operador pertorbat són pertorbacions del valor propi dominant doble del cas no pertorbat.

En el cas en què els valors propis dominants siguin $\{\lambda_0^+(\varepsilon), \lambda_0^-(\varepsilon)\}$, podem donar una aproximació de l'equació diferencial ordinària límit en el punt

$x = L$, d'acord amb les aproximacions d'ordre $(i\sqrt{\varepsilon})^2$ de $\lambda_0^+(\varepsilon)$ i $\lambda_0^-(\varepsilon)$ que hem calculat en l'apartat 4.2.1 d'aquest mateix capítol. En aquest apartat, havíem aproximat aquests dos primers valors propis per:

$$\lambda_0^+(i\sqrt{\varepsilon}) \simeq i\sqrt{\varepsilon} - \frac{\alpha + r}{2} \varepsilon + \dots \quad (4.33)$$

$$\lambda_0^-(i\sqrt{\varepsilon}) \simeq -i\sqrt{\varepsilon} - \frac{\alpha + r}{2} \varepsilon + \dots \quad (4.34)$$

Es pot comprovar que l'equació diferencial que generen és:

$$w'' + [(\alpha + r)\varepsilon + \dots] w' + \left(\left(\frac{\alpha + r}{2} \right)^2 \varepsilon^2 + \varepsilon + \dots \right) w = 0 \quad (4.35)$$

on ara $w = u(1, t)$ i les derivades ho són respecte el temps. Com que el subespai de valors propis dominants té dimensió 2, l'ordre de l'equació diferencial límit també és 2. I, òbviament, depèn del paràmetre pertorbador ε . De tota manera, cal tenir en comte que només es tracta d'una *aproximació* a l'equació diferencial ordinària límit.

L'equació 4.35 no té dimensió física, tal i com havíem buscat en l'apartat 1.2.3 del capítol 1. Desfent els canvis de variable, funció i paràmetres introduïts en aquest apartat, podem recuperar la versió *dimensional* de l'equació diferencial ordinària 4.35. Després de desfer els canvis, doncs, obtenim:

$$m w'' + \left(\frac{E_1}{L} + q \right) w' + \left[\left(\frac{E_1}{L} + q \right)^2 \cdot \frac{1}{4m} + \frac{E}{L} \right] w = 0 \quad (4.36)$$

on ara $w = u(L, t)$ i on els paràmetres de l'equació són els paràmetres reals del sistema molla-massa.

Escrita d'aquesta manera, podem comparar l'equació diferencial ordinària 4.36, límit del model en derivades parcials que havíem proposat, amb el model clàssic de l'equació de la molla amb fregament (veure l'equació 1.1, del capítol 1). Observarem que el coeficient d'amortiment de la molla clàssica ha quedat substituït aquí per una combinació lineal dels dos paràmetres que determinen la viscositat del sistema: E_1 per a la viscositat interna i r per a la fricció de l'amortidor en l'extrem. Pel que fa al coeficient de recuperació de la molla en el model clàssic, ens trobem ara amb un terme més extens, però on intervenen tots els paràmetres del nostre sistema molla-massa, cosa absolutament coherent si pensem el coeficient de recuperació és, per a la molla clàssica, un coeficient indicatiu del sistema.

Bibliografía

- [B] H.Brézis: *Análisis Funcional. Teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial (1984).
- [B-H-W] H.A. Barnes, J.F. Hutton, K. Walters: *An introduction to rheology*. Elsevier (1993).
- [Be-C] J. von Below, C. de Coster: *A qualitative theory for parabolic problems under dynamical boundary conditions*. J. of Ineq. & Appl., 5 (2000), 467-486.
- [Ca-L] A.N. Carvalho, G. Lozada-Cruz: *Patterns in parabolic problems with nonlinear boundary conditions*. Cadernos de Matemática, 02 (2001), 325-345.
- [C-SM] N. Cónsul, J. Solà-Morales: *Stability of local minima and stable non-constant equilibria*. Journal of Differential Equations, 157 (1999), 61-81.
- [D] J.L. Davis: *Mathematics of wave propagation*. Princeton University Press (2000).
- [E] L.C. Evans: *Partial differential equations*. AMS (1998).
- [G-K] I.C. Gohberg, M.G. Kreĭn: *Introduction to the theory of linear non-selfadjoint operators in a Hilbert space*. AMS (1991).
- [GR] M. Grobbelaar-van Dalsen: *On fractional powers of a closed pair of operators and a damped wave equation with dynamic boundary conditions*. Appl. Analysis, 53 (1994), 41-54.
- [H] D. Henry: *Geometric theory of semilinear parabolic equations*. Springer-Verlag (1989).

- [K] T. Kato: *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag (1980).
- [L] A. Freiria Neves, H. de Souza Ribeiro, O. Lopes: *On the spectrum of evolution operators generated by hyperbolic systems*. J. of Functional Analysis, vol. 67, no. 3 (1986), 320-344.
- [M] P. Massat: *Limiting behaviour for strongly damped nonlinear wave equations*. J. Differential Equations, 48 (1983), 334-349.
- [P] A. Pazy: *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag (1983).
- [S] L.I. Sedov: *Similarity and dimensional methods in mechanics*. CRC Press (1993).
- [T] R.I. Tanner: *Engineering rheology* Oxford Clarendon Press (1988).