

Comportamiento asintótico y oscilaciones en un problema viscoelástico.

Marta Pellicer i Sabadí (UPC)

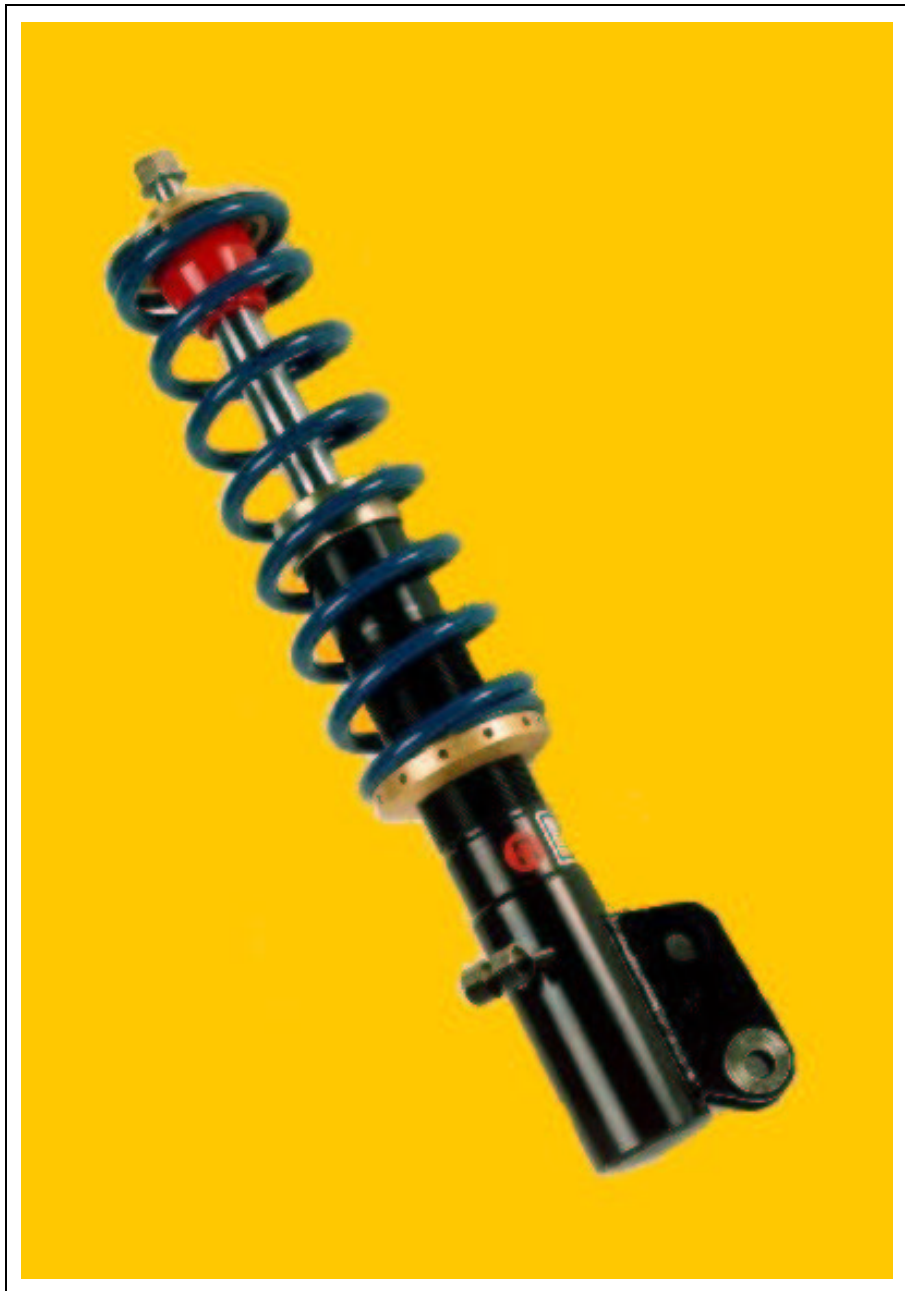
Tarragona, 15 de Septiembre del 2003

ESQUEMA:

1. Introducción
2. El modelo y objetivos
3. Comportamiento asintótico de las soluciones no forzadas
4. Oscilaciones de las soluciones forzadas globalmente acotadas

1. INTRODUCCIÓN

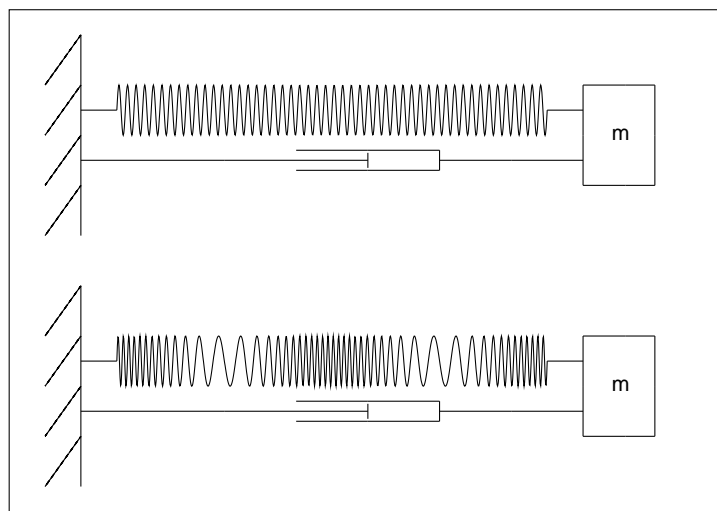
Sistema viscoelástico con disipación:
el amortiguador



Modelo clásico para un muelle con disipación:

$$m u''(t) + r u'(t) + k u(t) = 0$$

Pero hay otras alternativas:



EDO \Rightarrow muelle como medio discreto



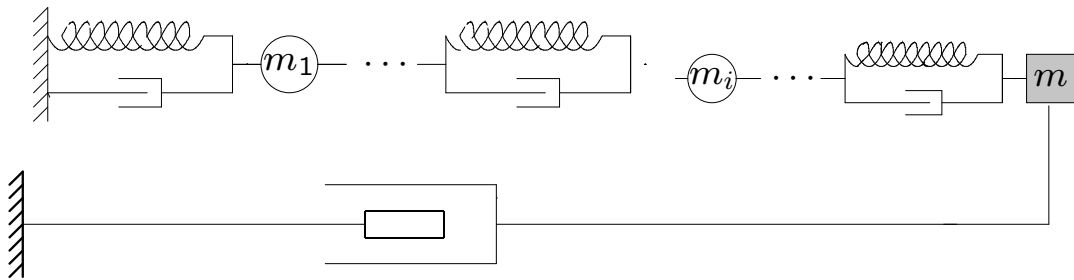
diferencias en las deformaciones internas?
posible disipación interior?



modelización con EDPs

2. EL MODELO Y OBJETIVOS

El modelo (versión infinitesimal):



El modelo: ecuación de ondas con disipación fuerte y condiciones de contorno dinámicas

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u_{tt} = E_1 u_{txx} + E u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0 \\ m u_{tt}(L, t) = -E u_x(L, t) - E_1 u_{tx}(L, t) - q u_t(L, t) + A e^{i\omega t} \end{array} \right.$$

$u(x, t)$ = desplazamiento de la partícula x a tiempo t

E, E_1 = elasticidad y disipación internas (muelle)

q = disipación externa (amortiguador externo)

$f(t) = A e^{i\omega t}$ = fuerza externa (opcional)

Pero demasiados parámetros ...

⇒ modelo adimensional

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \alpha u_{txx} = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u_{tt}(1, t) = -\varepsilon [u_x(1, t) + \alpha u_{tx}(1, t) + r u_t(1, t)] \end{cases}$$

(Grobelaar, Massat, ...)

$\alpha \geq 0$ (viscosidad interna), $r > 0$ (viscosidad externa), $\varepsilon \geq 0$ (masa externa)

Objetivo:

Caso no forzado: comparación del modelo propuesto con el modelo clásico a partir del comportamiento asintótico de las soluciones
(valores propios dominantes)

Caso forzado: estudio de la única solución globalmente acotada
(funciones de transferencia)

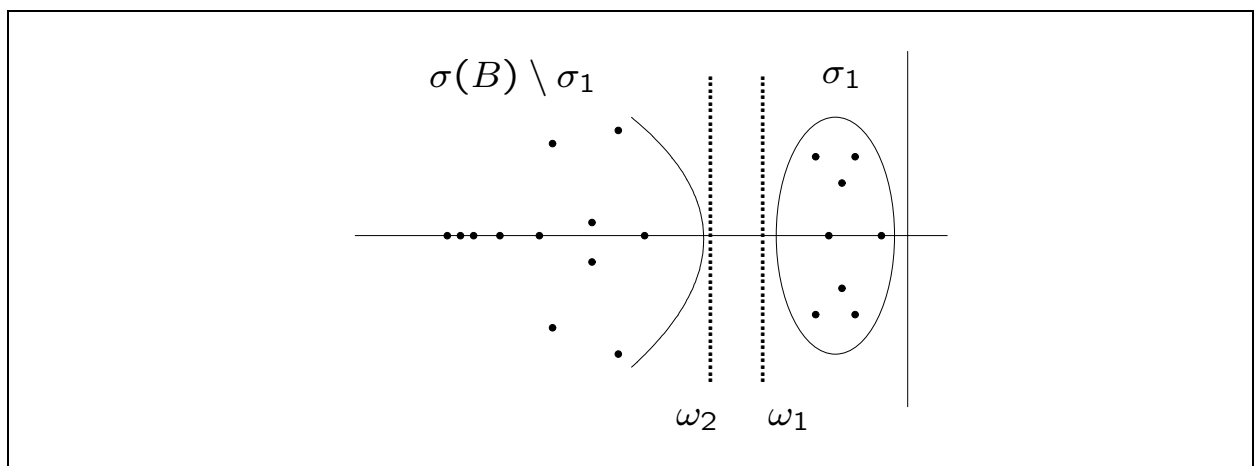
3. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LAS SOLUCIONES NO FORZADAS

Valores propios dominantes y reducción a EDOs

Pensamos el modelo como la ecuación de evolución

$$\frac{d}{dt} x(t) = B x(t)$$

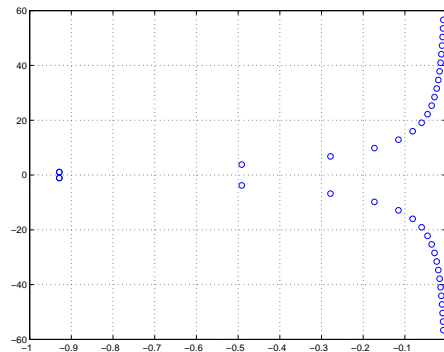
Si $\sigma(B) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, con σ_1 conjunto finito de vaps aislados, multiplicidad algebraica finita y parte real mayor que el resto, entonces σ_1 son **valores propios dominantes** de B .



En este caso, la ecuación de dimensión finita $x'_1 = B_1 x_1$ puede pensarse como el **límite** de la de dimensión infinita $x' = B x$

Resultados principales

(i) Muelle elástico perfecto ó $\alpha = 0$:



No hay espectro esencial y tenemos infinitos valores propios, todos con $Re \lambda < 0$ y se acumulan en el eje imaginario



No existe ningún subconjunto finito de valores propios dominantes \Rightarrow el modelo no admite una EDO como límite !

Pero ... todas las soluciones tienden a 0 cuando $t \rightarrow \infty$ y van tan lentamente como queramos.

(ii) Muelle viscoelástico con $\alpha > 0$ pequeño:

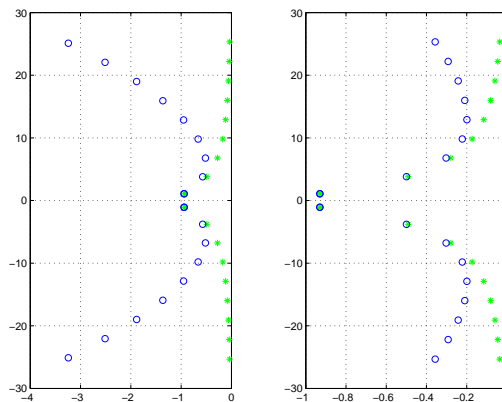
- El operador tiene espectro esencial $\left\{ \frac{-1}{\alpha} \right\}$

- $\sigma_p(A_\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \sigma_p(A_0)$ sobre compactos

(convergencia generalizada de operadores [Kato])

pero no hay convergencia global

(operador sectorial cuando $\alpha > 0$)



($\alpha = 0.01$) ($\alpha = 0.001$)

Conjunto y cantidad de vaps dominantes depende de $\alpha \Rightarrow$ También la EDO límite!

(iii) Muelle con una gran masa en el extremo ($\varepsilon > 0$ pequeño) :

Tma: Si $\varepsilon < \varepsilon_0$ el operador admite $\{\lambda_0^+(\varepsilon), \lambda_0^-(\varepsilon)\}$ (perturbaciones de $\lambda(0) = 0$, vap dominante cuando $\varepsilon = 0$) como subconjunto finito de valores propios dominantes.

↓

Las soluciones en $x = L$ de la EDP pueden aproximarse, cuando $t \rightarrow \infty$, por las soluciones de la EDO:

$$m w'' + k_1 w' + k_0 w = 0$$

con

$$k_1 = \left(\frac{E_1}{L} + q\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{E_1}{L} + q\right) \left(\frac{\rho L}{m}\right) + \left(\frac{4 E_1}{45 L} + \frac{q}{15}\right) \left(\frac{\rho L}{m}\right)^2 + \dots$$

$$k_0 = \frac{E}{L} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\rho L}{m}\right) + \frac{4}{45} \left(\frac{\rho L}{m}\right)^2 + \left(\frac{q^2}{45 E \rho} - \frac{16}{945}\right) \left(\frac{\rho L}{m}\right)^3 + \dots \right]$$

No es la ecuación clásica del muelle !!

4. OSCILACIONES DE LAS SOLUCIONES FORZADAS GLOBALMENTE ACOTADAS

Consideramos ahora la fuerza externa $f(t) = A e^{i\omega t}$ y buscamos la única solución globalmente acotada

Funciones de transferencia

1. EDOs

La ecuación

$$k_2 z''(t) + k_1 z'(t) + k_0 z(t) = A e^{i\omega t}$$

admite una única solución globalmente acotada en el tiempo, que es:

$$z_b(t) = A H_{edo}(\omega) e^{i\omega t}$$

con

$$H_{edo}(\omega) = \frac{1}{k_0 - \omega^2 k_2 + k_1 i \omega}$$

2. EDPs

En el caso de nuestro modelo, la solución globalmente acotada es de la forma:

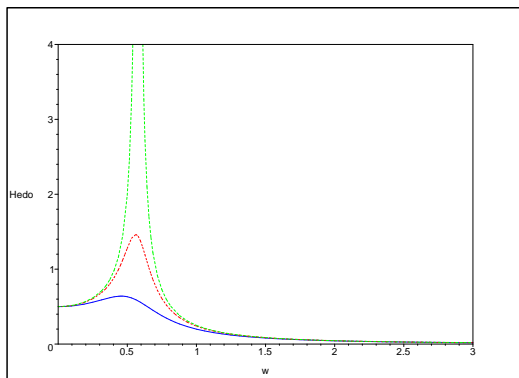
$$u_b(x, t) = A H_{edp}(x, \omega) e^{i\omega t}$$

con

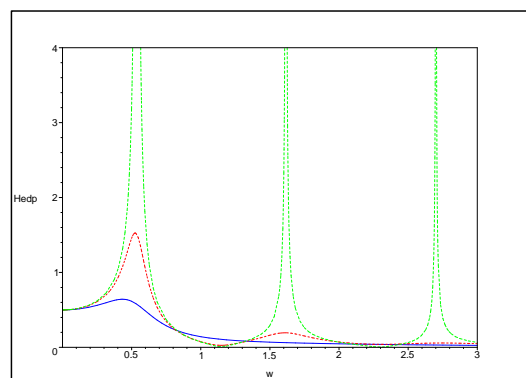
$$H_{edp}(x, \omega) = \frac{\sinh(ax)}{[-\omega^2 m \sinh(aL) + Ea \cosh(aL)] + i\omega[E_1 a \cosh(aL) + q \sinh(aL)]}$$

(Función de transferencia en el punto x)

$$y \quad a^2 = \frac{-\omega^2 \rho}{E + E_1 \omega i}$$



Módulo de $H_{edo}(\omega)$



Módulo de $H_{edp}(\omega)$

Objetivo: queremos que $u_b(L, t)$ sea $z_b(t)$ cuando ω sea pequeño

$$H_{edp}(\omega) \sim H_{edo}(\omega) \text{ cuando } \omega \sim 0.$$

Desarrollando $H_{edp}(\omega)$ y $H_{edo}(\omega)$ en series de potencias en $\omega = 0$ y igualando coeficientes, obtenemos k_0 , k_1 y $k_2 \Rightarrow$ la EDO límite es:

$$\left(m + \frac{1}{3}\rho L\right) x''(t) + \left(\frac{E_1}{L} + q\right) x'(t) + \left(\frac{E}{L}\right) x(t) = A e^{i\omega t}$$

$$(|H_{edo}(\omega) - H_{edp}(\omega)| = 0 + O(\omega^4))$$

No es la misma ecuación límite \Rightarrow nuevo concepto de EDO límite (cuando buscamos la solución globalmente acotada):

Antes: mejor aproximación \Leftrightarrow más valores propios dominantes

Ahora: mejor aproximación $\Leftrightarrow |H_{edo} - H_{edp}|$ es de orden mayor \Rightarrow EDO de orden superior