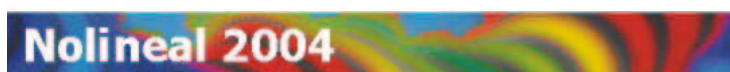


**Ecuación diferencial  
ordinaria  
como límite para una  
ecuación de ondas no lineal  
para un sistema  
muelle-masa**

M. Pellicer (U. Politècnica de Catalunya)  
e-mail: [marta.pellicer@upc.es](mailto:marta.pellicer@upc.es)

J. Solà-Morales (U. Politècnica de Catalunya)  
e-mail: [jc.sola-morales@upc.es](mailto:jc.sola-morales@upc.es)

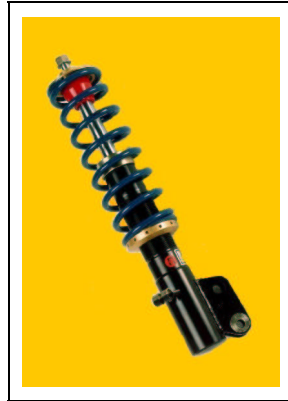


Toledo, 4 de Junio de 2004

1. Modelo y objetivos
2. Variedades invariantes exponencialmente atractoras
3. Ecuación límite

# 1. MODELO Y OBJETIVOS

► Sistema:



Muelle viscoelástico atado a masa rígida en movimiento y amortiguador en el extremo

⇒ **modelo lineal\***

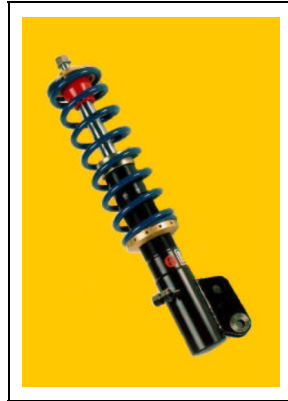
Nolineal 2004

\**Analysis of a viscoelastic spring-mass model.*

M. Pellicer, J. Solà-Morales. JMAA, 294/2 (2004), 687-698.

# 1. MODELO Y OBJETIVOS

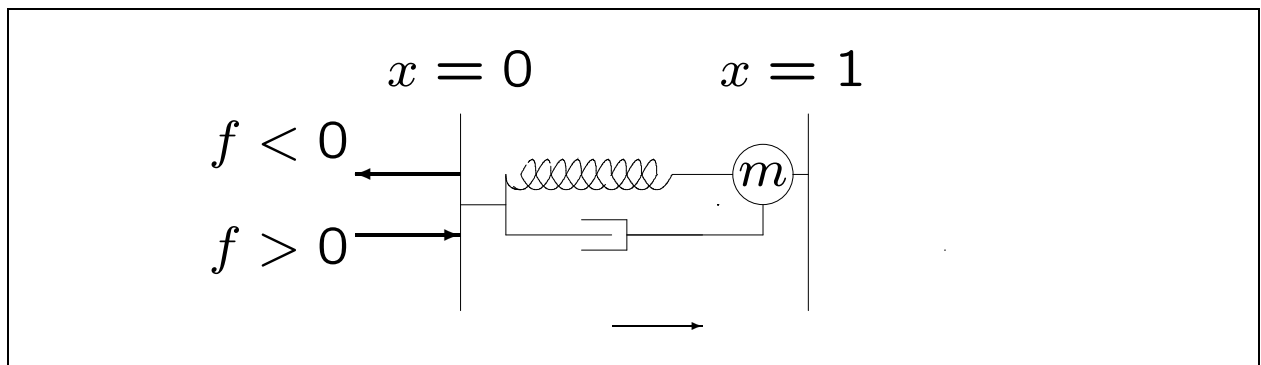
► Sistema:



Muelle viscoelástico atado a masa rígida en movimiento y amortiguador en el extremo

⇒ **modelo lineal\***

+



Aceleración impuesta en  $x = 0$  (*control*)

⇒ **modelo no lineal**

Nolineal 2004 

\**Analysis of a viscoelastic spring-mass model.*

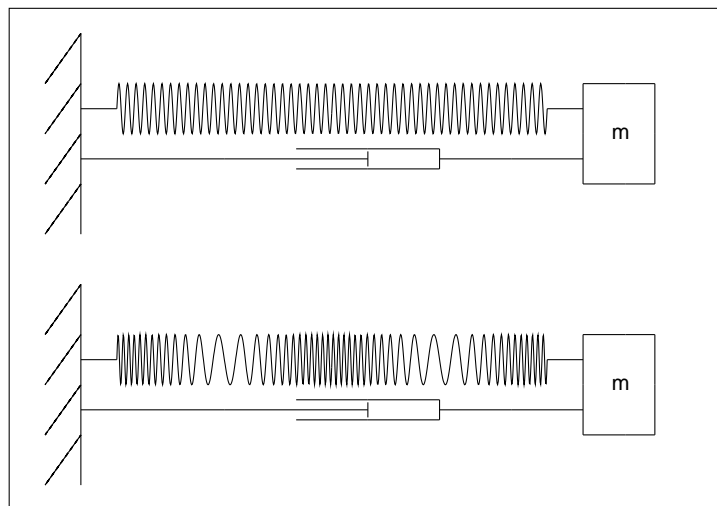
M. Pellicer, J. Solà-Morales. JMAA, 294/2 (2004), 687-698.

► EDP vs EDO:

Modelo clásico para un muelle con disipación:

$$m u''(t) + r u'(t) + k u(t) = 0$$

Pero hay otras alternativas:



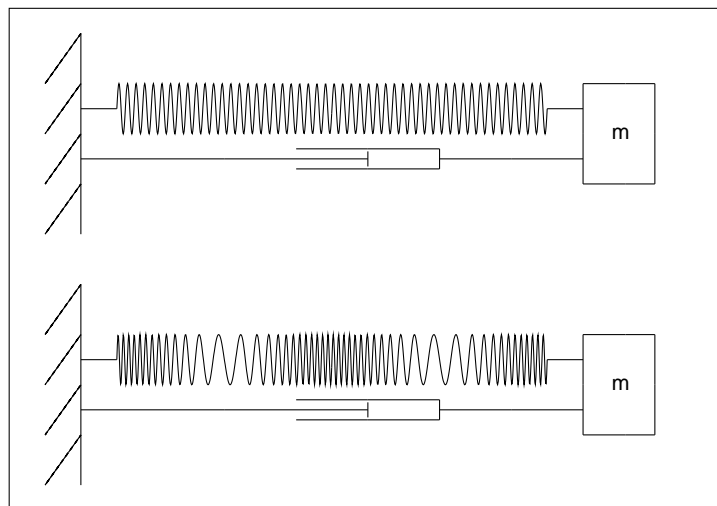
EDO  $\Rightarrow$  muelle como medio discreto

► EDP vs EDO:

Modelo clásico para un muelle con disipación:

$$m u''(t) + r u'(t) + k u(t) = 0$$

Pero hay otras alternativas:



EDO  $\Rightarrow$  muelle como medio discreto



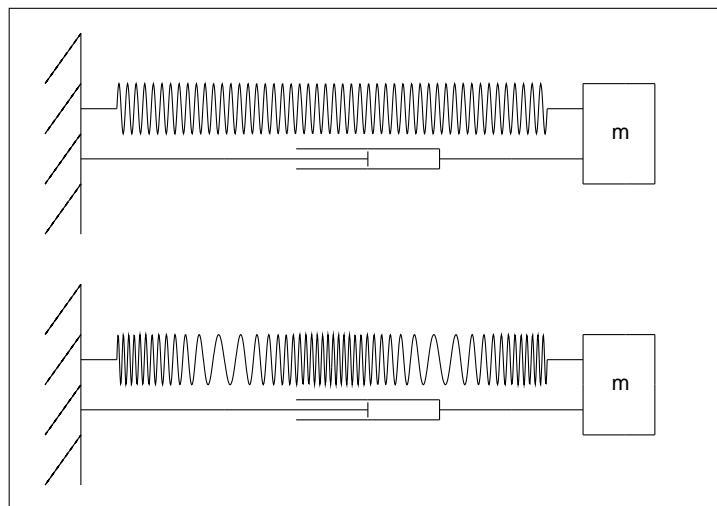
- ★ diferencias en las deformaciones internas?
- ★ posible disipación interior?

► EDP vs EDO:

Modelo clásico para un muelle con disipación:

$$m u''(t) + r u'(t) + k u(t) = 0$$

Pero hay otras alternativas:



EDO  $\Rightarrow$  muelle como medio discreto



- ★ diferencias en las deformaciones internas?
- ★ posible disipación interior?



modelización con EDPs

► Modelo\*

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) - \alpha u_{txx}(x, t) + \kappa \varepsilon f \left( u(1, t), \frac{u_t(1, t)}{\sqrt{\varepsilon}} \right) = 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u_{tt}(1, t) = -\varepsilon [u_x + \alpha u_{tx} + r u_t](1, t) - \kappa \varepsilon f \left( u(1, t), \frac{u_t(1, t)}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \end{array} \right.$$

Ecuación de ondas con **disipación fuerte** y condiciones de contorno **dinámicas**, con una **no linealidad no local**

$u(x, t)$  = desplazamiento de la partícula  $x$  a tiempo  $t$

$\alpha > 0 \rightsquigarrow$  disipación interna (muelle)

$r > 0 \rightsquigarrow$  disipación externa (amortiguador externo)

$\varepsilon \geq 0 \rightsquigarrow$  inverso a la masa externa

Nolineal 2004 

\*Modelo lineal:

M. Grobbelaar-van Dalsen, Appl. Analysis, 53 (1994), 41-54.

M. Pellicer, J. Solà-Morales. JMAA, 294/2 (2004), 687-698.



La aceleración que consideramos en  $x = 0$  es de la forma:

$$u_{tt}(0) = \kappa f_{\varepsilon} \left( \underbrace{u(1, t) - u(0, t)}_{\neq ia \text{ desplazamiento}}, \underbrace{u_t(1, t) - u_t(0, t)}_{\neq ia \text{ velocidad}} \right)$$

donde  $\kappa > 0$  parámetro fijo y

$$f_{\varepsilon}(z_1, z_2) := \varepsilon f \left( z_1, \frac{z_2}{\sqrt{\varepsilon}} \right)$$

- ★  $f(z_1, z_2)$  Lipschitz, acotada y *suficientemente regular*.

► Objetivo:

Ver cuando la ecuación de ondas no lineal admite una EDO como límite



**variedades invariantes**



cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  existe una EDO límite que, con un reescalado en el tiempo, es:

$$\ddot{u} + u + \kappa f(u, \dot{u}) = 0, \quad u = u(1, t)$$

► Objetivo:

Ver cuando la ecuación de ondas no lineal admite una EDO como límite



**variedades invariantes**



cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  existe una EDO límite que, con un reescalado en el tiempo, es:

$$\ddot{u} + u + \kappa f(u, \dot{u}) = 0, \quad u = u(1, t)$$

★ También como **problema inverso**:

$f$  **control** externo en  $x = 0$  para conseguir un **desplazamiento-objetivo** (posible si es solución de una EDO tipo la EDO límite).

## 2. VARIEDAD INVARIANTE EXPONENCIALMENTE ATRACTORA

★  $S \subset X \times Y$  es una *variedad invariante* de

$$\begin{cases} \dot{x} = Tx + h(x, y) \\ \dot{y} = By + g(x, y) \end{cases} \quad (\text{p. ej. } \dim Y < \infty)$$

si existe  $\sigma : Y \rightarrow X$  tal que

$$S = \{(x, y) \in X \times Y : x = \sigma(y)\}$$

y  $\forall (x_0, y_0) \in S$  existe  $(x(\cdot), y(\cdot))$  solución tq:

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0 \text{ y } (x(t), y(t)) \in S \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

## 2. VARIEDAD INVARIANTE EXPONENCIALMENTE ATRACTORA

★  $S \subset X \times Y$  es una *variedad invariante* de

$$\begin{cases} \dot{x} = Tx + h(x, y) \\ \dot{y} = By + g(x, y) \end{cases}$$

si existe  $\sigma : Y \rightarrow X$  tal que

$$S = \{(x, y) \in X \times Y : x = \sigma(y)\}$$

y  $\forall (x_0, y_0) \in S$  existe  $(x(\cdot), y(\cdot))$  solución tq:

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0 \text{ y } (x(t), y(t)) \in S \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

★  $S$  es *exponencialmente atractora* si

$\exists \gamma, K \geq 0$  tq:

$$\|x(t) - \sigma(y(t))\| \leq Ke^{-\gamma t} \|x(0) - \sigma(y(0))\|$$

para toda solución  $(x(t), y(t))$ .

► Preparación del problema:

EDP como ec. evolución con el tiempo reescalado:

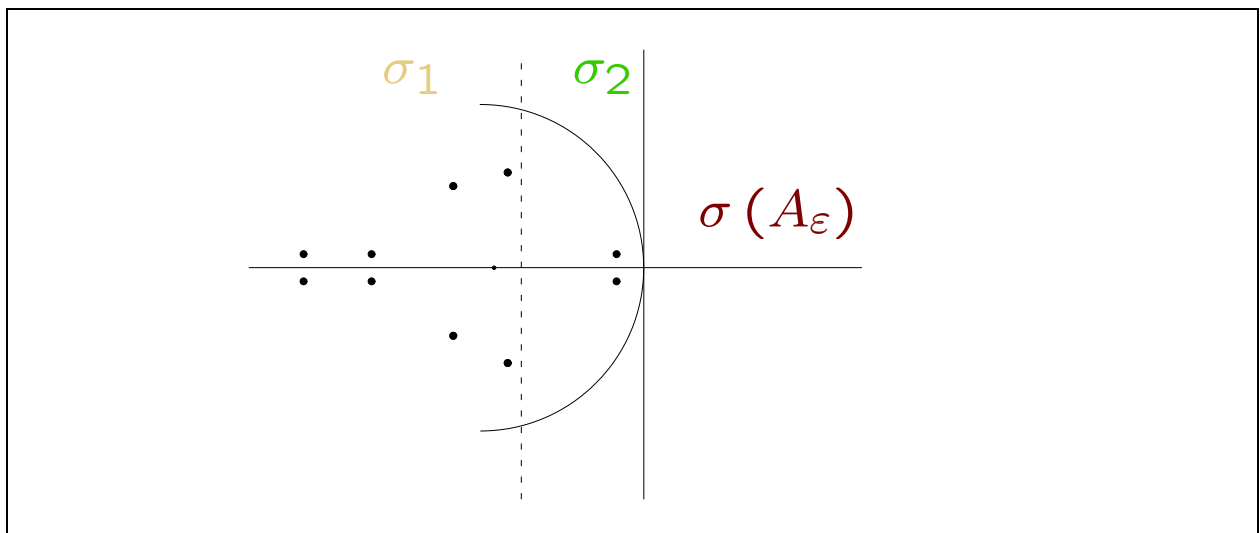
$$t \rightarrow t\sqrt{\varepsilon}$$

(aceleración del sistema cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ )

$$\frac{d}{dt} V - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_\varepsilon V = F_N(V)$$

+

Análisis espectral del operador lineal  $A_\varepsilon$



Separación del espectro (  $\Rightarrow$  del espacio,  
proyecciones, ... )

$$\sigma \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_\varepsilon \right) = \sigma_1^\varepsilon \cup \sigma_2^\varepsilon$$

con

$$\sigma_1^\varepsilon = \sigma \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_\varepsilon \right) \setminus \sigma_2^\varepsilon \Rightarrow \operatorname{Re} (\sigma_1^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\infty$$

$$\sigma_2^\varepsilon = \{ \mu_0^+(\varepsilon), \mu_0^-(\varepsilon) \} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \pm i \}$$

Separación del espectro (  $\Rightarrow$  del espacio, proyecciones, ... )

$$\sigma \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_\varepsilon \right) = \sigma_1^\varepsilon \cup \sigma_2^\varepsilon$$

con

$$\sigma_1^\varepsilon = \sigma \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_\varepsilon \right) \setminus \sigma_2^\varepsilon \Rightarrow \operatorname{Re} (\sigma_1^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\infty$$

$$\sigma_2^\varepsilon = \{ \mu_0^+(\varepsilon), \mu_0^-(\varepsilon) \} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \pm i \}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} V_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (A_\varepsilon|_{H_1^\varepsilon}) \right) V_1 + P_1^\varepsilon (F_N(V)) \\ \frac{d}{dt} V_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (A_\varepsilon|_{H_2^\varepsilon}) \right) V_2 + P_2^\varepsilon (F_N(V)) \end{cases}$$

(dim 2)



### 3. ECUACIÓN LÍMITE

**TEOREMA.** La ecuación de evolución no lineal reescalada converge cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  en la topología  $C^1$  al sistema:

$$\begin{cases} \dot{u}(1) = w(1) \\ \dot{w}(1) = -u(1) - \kappa f(u(1), w(1)) \end{cases}$$

Si estructuralment estable  $\Rightarrow$  flujos serán **topológicamente equivalentes** si  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño.



Con el tiempo **reescalado**, las soluciones de la EDP no lineal inicial convergen a las soluciones de la EDO:

$$\ddot{u}(1) + u(1) + \kappa f(u(1), \dot{u}(1)) = 0$$

donde  $u(1) = u(1, t)$ .

## Idea de la demostración:

► **PASO 1:** Existe var. inv. exp. atr.

$$S_\varepsilon = \{V = (V_1, V_2) : V_1 = \sigma_\varepsilon(V_2), V_2 \in H_2^\varepsilon\}$$

donde  $\dim(H_2^\varepsilon) = 2$ .

$$\text{Además, } \sigma_\varepsilon, D\sigma_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \text{ en } \|\cdot\|_\varepsilon.$$

(aplicación del tma. var. inv. para familias de operadores\*  $\Rightarrow$  **Dificultad: operador no autoadjunto**)

\**Infinite dimensional dynamics described by ordinary differential equations.* A.N. Carvalho. JDE, 116, no. 2 (1995), 338-404.

\*A.N.Carvalho, G.Lozada-Cruz, Cadernos de Matem. (2001).

\*V.L. Carbone, Tesis (2003).

## Idea de la demostración:

► **PASO 1:** Existe var. inv. exp. atr.

$S_\varepsilon = \{V = (V_1, V_2) : V_1 = \sigma_\varepsilon(V_2), V_2 \in H_2^\varepsilon\}$   
donde  $\dim(H_2^\varepsilon) = 2$ .

Además,  $\sigma_\varepsilon, D\sigma_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$  en  $\|\cdot\|_\varepsilon$ .

(aplicación del tma. var. inv. para familias de operadores\*  $\Rightarrow$  **Dificultad: operador no autoadjunto**)

### Consecuencias:

1. EDP tiende a la ecuación sobre  $S_\varepsilon \Rightarrow$   
tiende a una EDO de orden 2:

$$\frac{d}{dt} V_2 = A_N(V_2) + P_2^\varepsilon [F_N(V_2 + \sigma_\varepsilon(V_2))], \quad V_2 \in H_2^\varepsilon$$

2. permitirá cálculo explícito del límite de la EDO cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  (norma  $\varepsilon$  crucial)

Nolineal 2004 

\**Infinite dimensional dynamics described by ordinary differential equations.* A.N. Carvalho. JDE, 116, no. 2 (1995), 338-404.

\*A.N.Carvalho, G.Lozada-Cruz, Cadernos de Matem. (2001).

\*V.L. Carbone, Tesis (2003).

## Idea de la demostración:

- ▶ **PASO 2:** límite de la EDO sobre la variedad invariante

### PROBLEMA:

$A_\varepsilon$  no autoadjunto  $\Rightarrow$  EDO en *variedad parecida*

Usamos que:

$$H_2^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} H_2^0$$

(isomorfismo explícito y proyecciones convergen en norma)

$\Downarrow$

$$S_\varepsilon = V_\varepsilon + \sigma_\varepsilon(V_\varepsilon), \quad V_\varepsilon \in H_2^\varepsilon$$

*variedad próxima a*

$$S_0 = V_0 + \sigma_\varepsilon(V_0), \quad V_0 \in H_2^0$$

## Idea de la demostración:

Ecuación en  $S_0$  (cambio de variables)

+

límite de los coeficientes en norma  $C^1$

usando que  $\sigma_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$  en  $\|\cdot\|_\varepsilon$

↓

EDO límite (norma  $C^1$ )

$$\ddot{u}(1) + u(1) + \kappa f(u(1), \dot{u}(1)) = 0$$

(si estabilidad estructural  $\Rightarrow$  dinámica de la EDP para  $\varepsilon$  pequeño y tiempo grande )