Viscosidad interna y comportamiento límite en una ecuación de ondas con disipación fuerte

Marta Pellicer (Universitat Autònoma de Barcelona)

pellicer@mat.uab.es

Joan Solà-Morales (Universitat Politècnica de Catalunya)

jc.sola-morales@upc.edu

CEDYA 2005

19-23 de Septiembre, U. Carlos III de Madrid

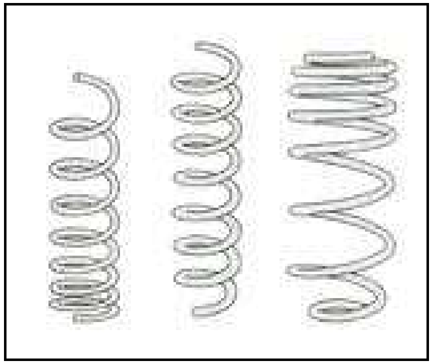
Esquema

- El **sistema** muelle-masa.
- El **modelo**: ecuación de ondas con disipación fuerte.
- **Herramientas** principales:
  valores propios dominantes, convergencia generalizada.
- **Resultados principales** ...

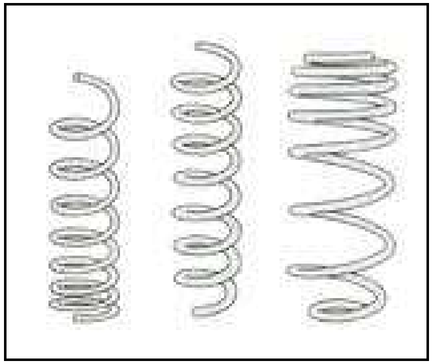
El sistema

Un sistema muelle-masa con disipación

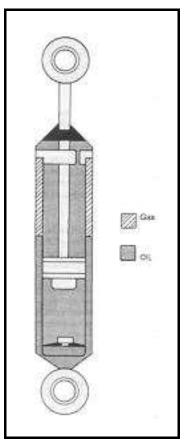
Presente en: automoción, control sísmico, ...



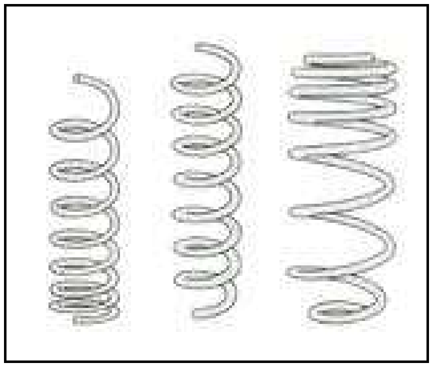
Muelle o dispositivo **viscoelástico**
(elasticidad + posible disipación **interna**)
fijado en un extremo



Muelle o dispositivo **viscoelástico**
(elasticidad + posible disipación **interna**)
fijado en un extremo

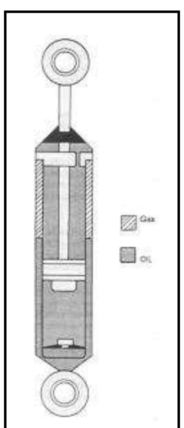


Amortiguador o dispositivo **viscoso**
(disipación **externa**)
actuando en la masa del otro extremo



Muelle o dispositivo **viscoelástico**
(elasticidad + posible disipación **interna**)
fijado en un extremo

$\Rightarrow$ Ecuación



Amortiguador o dispositivo **viscoso**
(disipación **externa**)
actuando en la masa del otro extremo

$\Rightarrow$ Condiciones de contorno

Motivación del problema: EDP vs. EDO

Sistema muelle-masa como una EDO (muelle como sistema discreto):

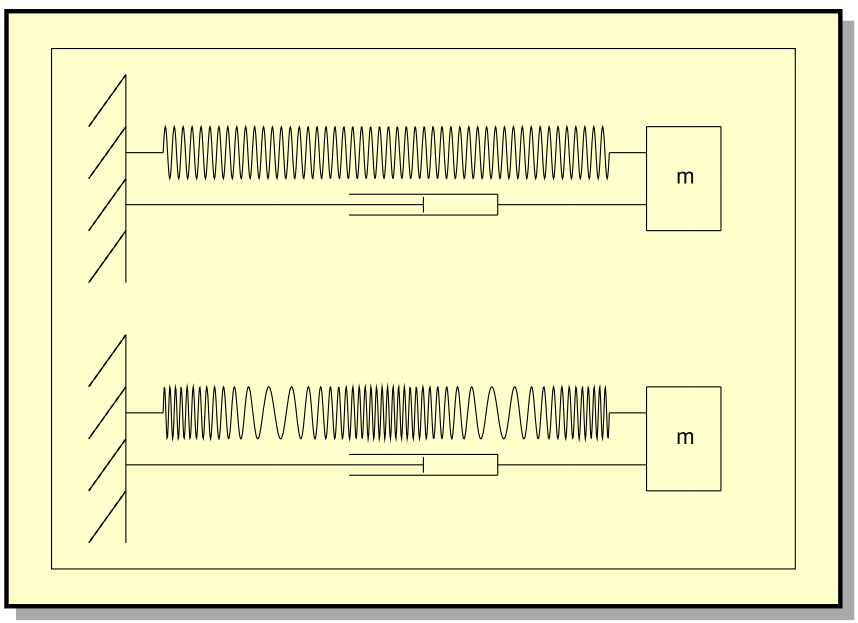
$$m\,u''(t) + r\,u'(t) + k\,u(t) = 0$$

Motivación del problema: EDP vs. EDO

Sistema muelle-masa como una EDO (muelle como sistema discreto):

$$m\,u''(t) + r\,u'(t) + k\,u(t) = 0$$

Pero ...



- diferencias en la deformación interna?
- posible disipación interior?

Modelo lineal (adimensional)

Ec. de ondas con **disipación fuerte** y condiciones de contorno **dinámicas**:

$u(x,t)$ = desplazamiento de la partícula x a tiempo t

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \alpha\, u_{txx} = 0, \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u_{tt}(1,t) = -\varepsilon\ \left[u_x(1,t) + \alpha\, u_{tx}(1,t) + r\, u_t(1,t)\right] \end{cases}$$

$\alpha \geq 0 \rightsquigarrow$ disipación interna (muelle)[a]

$r > 0 \rightsquigarrow$ disipación externa (amortiguador externo)

$\varepsilon \geq 0 \rightsquigarrow$ inverso de la masa del extremo[b]

[a] ***"Spectral analysis and limit behaviors in a spring-mass system"***, MP, J. Sola-Morales. Preprint (2005)

[b] ***"Analysis of a viscoelastic spring-mass model"***, MP, J. Sola-Morales. JMAA (2004)

Modelo lineal (adimensional)

Ec. de ondas con **disipación fuerte** y
condiciones de contorno **dinámicas**:

$u(x,t)$ = desplazamiento de la partícula x a tiempo t

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \alpha\, u_{txx} = 0, \quad 0 < x < 1, \; t > 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u_{tt}(1,t) = -\varepsilon \; [u_x(1,t) + \alpha\, u_{tx}(1,t) + r\, u_t(1,t)] \end{cases}$$

- ***M. Grobbelaar-van Dalsen (1994):*** $\alpha = \varepsilon = 1$ **,** $r = 0$ *; P. Massat (1983).*
- ***D.L. Russell (1986):*** *caso explícito* $\varepsilon = 0$ *para la ec. de la viga elástica.*

Modelo lineal (adimensional)

Ec. de ondas con **disipación fuerte** y
condiciones de contorno **dinámicas**:

$u(x,t)$ = desplazamiento de la partícula x a tiempo t

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \alpha\, u_{txx} = 0, \quad 0 < x < 1, \ t > 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u_{tt}(1,t) = -\varepsilon \ \left[u_x(1,t) + \alpha\, u_{tx}(1,t) + r\, u_t(1,t) \right] \end{cases}$$

- ***Medio elástico + masa rígida:*** *C.Castro, E.Zuazua '98 (controlabilidad) ; ...*
- ***Ec. de ondas con disipación fuerte:***
  N. Cónsul, J. Solà-Morales '99 (estabilidad de sus equilibrios) ;
  K. Liu, Z.Liu '98; S. Chen, K. Liu, Z.Liu '99 (decaimiento exponencial).
- ***Ec. de ondas con disipación débil + c.c. dinámicas:***
  A. Freiria Neves, H. de Souza Ribeiro, O. Lopes '86.
- *...*

Modelo lineal (adimensional)

Ec. de ondas con **disipación fuerte** y
condiciones de contorno **dinámicas**:

$u(x,t)$ = desplazamiento de la partícula x a tiempo t

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \alpha\, u_{txx} = 0, \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u_{tt}(1,t) = -\varepsilon\ \left[u_x(1,t) + \alpha\, u_{tx}(1,t) + r\, u_t(1,t)\right] \end{cases}$$

- ***Versión no homogénea*** [a]*: soluciones globalmente acotadas* $\rightsquigarrow$ *Resonancias*
- ***Problema no lineal*** [b]*: feedback control, variedades invariantes exponencialmente atractoras (A.N. Carvalho, 1995; A.N. Carvalho, G. Lozada-Cruz, 2001)*

---

[a] *Asymptotic behavior and oscillations in a viscoelastic problem*, MP, Proceedings XVIII CEDYA-VIII CMA (2003).

[b] *En preparación*, MP.

Herramientas principales

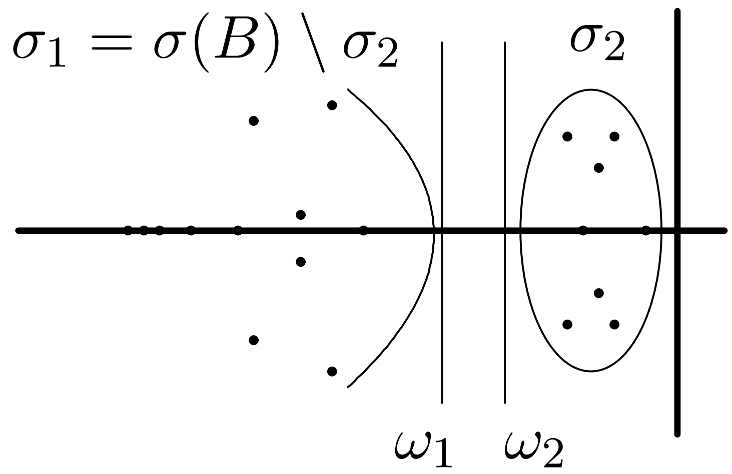
1. Comportamiento asintótico de las sol's: reducción a EDOs.

Consideramos la ec. de evolución $\boxed{x'(t) = B\,x(t)}$ con B analítico.

Def: Llamamos σ_2 un conjunto de **vaps dominantes de** B si:

$\sigma(B) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, donde σ_2:

- conjunto finito de vaps aislados
- multiplicidad algebraica finita
- $Re\,(\sigma_1) < \omega_1 < \omega_2 < Re\,(\sigma_2)$
  (si $Re\,(\sigma_2) = C$, σ_2 es el conjunto **maximal dominante**).



Tma: En este caso, la ecuación de dimensión finita $\boxed{x_2' = B_2\,x_2}$ se puede pensar como el **límite** cuando $t \to +\infty$ de $x' = B\,x$

2. Convergencia generalizada de operadores (T. Kato).

- Generalización de la convergencia en norma ...

- **Tma. [T. Kato] (Semicont. partes separadas del espectro):**

  Sea T cerrado, con $\sigma(T)$ **separado** *en dos por una curva cerrada Γ.*
  Entonces, $\forall\ S$ cerrado t.q. $\hat{\delta}(T,S)$ sea suficientemente pequeño, tenemos $\sigma(S)$ ***separado del mismo modo****.*

  (s.e. propios isomorfos, conv. en norma de las proyecciones, ...)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{continuidad de conjuntos finitos de vaps ...}}$$

Resultados principales

Podemos escribir el modelo en EDPs como la ec. de evolución:

$$\boxed{\frac{d}{dt}V - A_\alpha V = 0}$$

$$\Downarrow$$

$\boxed{\text{EDP} \longrightarrow \text{EDO clásica?}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{vaps dominantes?}}$

Resultados principales

Podemos escribir el modelo en EDPs como la ec. de evolución:

$$\boxed{\frac{d}{dt}V - A_\alpha V = 0}$$

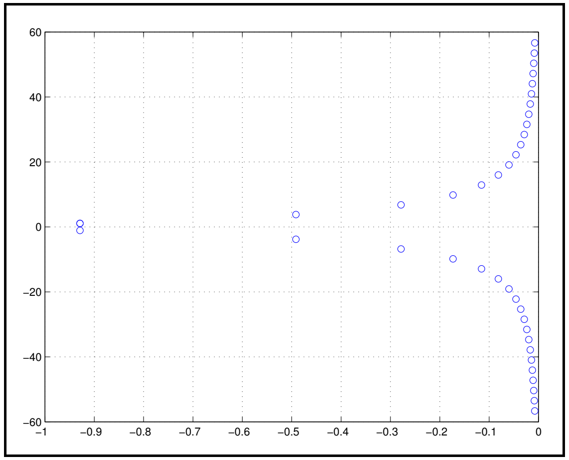
$$\Downarrow$$

$\boxed{\text{EDP} \rightarrow \text{EDO clásica?}} \Leftrightarrow \boxed{\text{vaps dominantes?}}$

- Casos respecto α (viscosidad interna):
  - $\alpha = 0$
  - $\alpha \sim 0$
  - $\alpha >> 1$

1. Muelle puramente elástico o $\alpha = 0$ ($\varepsilon, r > 0$)

- A_0 generador de un $\mathcal{C}^0$ semigrupo de contracciones.
- Espectro:
  - $\sigma(A_0) = \sigma_p(A_0)$ (no espectro esencial)
  - infinitos vaps, aislados y con multiplicidad algebraica finita.
  - $Re\,\lambda < 0$ para todo $\lambda \in \sigma(A_0)$.
  - $Re\,\lambda_n \to 0$ y $Im\,|\lambda_n| \to \infty$.



1. Muelle puramente elástico o $\alpha = 0$ ($\varepsilon, r > 0$)

- A_0 generador de un $\mathcal{C}^0$ semigrupo de contracciones.

  *(**Dem:** $-A_0$ operador maximal monótono)*

- Espectro:
  - $\sigma(A_0) = \sigma_p(A_0)$ (no espectro esencial)
  - infinitos vaps, aislados y con multiplicidad algebraica finita.
  - $Re\,\lambda < 0$ para todo $\lambda \in \sigma(A_0)$.
  - $Re\,\lambda_n \to 0$ y $Im\,|\lambda_n| \to \infty$.

  *(**Dem:** Análisis de las fups,*
  ec. característica para los vaps y energía)

Tma (Comportamiento asintótico de las sol's):

- No existencia de ningún conjunto finito de vaps dominantes:

$$\boxed{\text{EDP} \not\twoheadrightarrow \text{EDO!!}}$$

- Pero ... todas las soluciones **tienden a 0** cuando $t \to +\infty$.

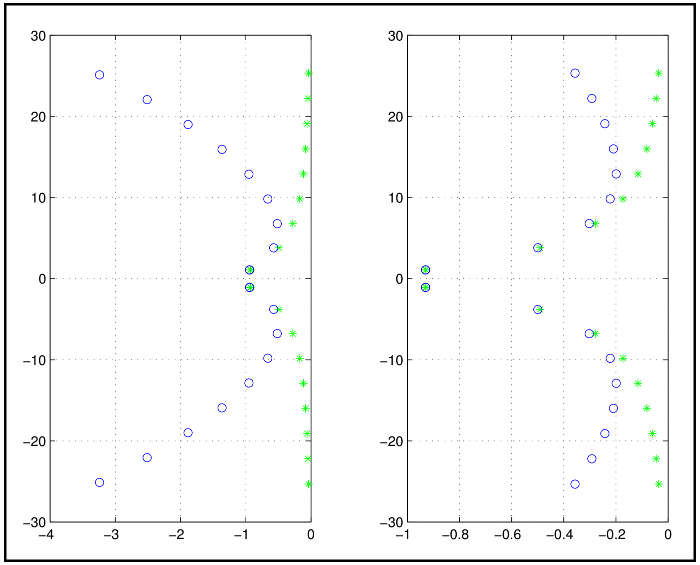
  Y existen soluciones que tienden a cero **tan lentamente como queramos** (porqué no disipación interior).

Decaimiento polinomial para soluciones más suaves?

2. Muelle viscoelástico con $\alpha > 0$ pequeño ($\varepsilon, r > 0$)

- A_α es el generador de un semigrupo analítico si $\alpha > 0$ (y $\varepsilon \geq 0$).

- Espectro:
  - $\sigma_{ess}(A_\alpha) = \{-1/\alpha\}$, $\alpha > 0$;
  - $\sigma_p(A_\alpha) \xrightarrow[\alpha \to 0]{} \sigma_p(A_0)$ en compactos, pero **no globalmente**.



$(\alpha = 0.01)$ $(\alpha = 0.001)$

2. Muelle viscoelástico con $\alpha > 0$ pequeño ($\varepsilon, r > 0$)

- A_α es el generador de un semigrupo analítico si $\alpha > 0$ (y $\varepsilon \geq 0$).

  *(**Dem:** Massat'83)*

- Espectro:
  - $\sigma_{ess}(A_\alpha) = \{-1/\alpha\}$, $\alpha > 0$;
  - $\sigma_p(A_\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \sigma_p(A_0)$ en compactos, pero **no globalmente**.

  *(**Dem:** $A_\alpha \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} A_0$ en sentido generalizado, pero A_α es **sectorial** cuando $\alpha > 0$)*

Tma (Existencia de vaps dominantes y EDO límite):

Si $\alpha > 0$ suficientemente pequeño,

existe un conjunto finito de vaps dominantes, pero ...

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{EDP} \longrightarrow \text{EDO ?}}$$

$$\Downarrow$$

Sí, pero el **orden** y los **coeficientes** de la EDO
pueden ser distintos para cada α.

(en particular, la EDO límite puede **no** ser de orden 2 !!)

3. Muelle viscoelástico sobreamortiguado o $\alpha > 0$ grande

- Caso explícito límite cuando $\varepsilon = \infty$, $r = 0$: **sobreamortiguación** para α grande.

3. Muelle viscoelástico sobreamortiguado o $\alpha > 0$ grande

- Caso explícito límite cuando $\varepsilon = \infty$, $r = 0$: **sobreamortiguación** para α grande.

- **Tma (No EDO límite):**

  Si ε grande, r pequeño y α **suficientemente grande**:

$$-\infty < \lambda_n < -1/\alpha \text{ con } \lambda_n^+ \to -1/\alpha$$

$$\Downarrow$$

  - No conjunto finito de vaps dominantes $\Rightarrow$ $\boxed{\text{EDP} \nrightarrow \text{EDO!!}}$
  - Fenómeno de la **sobreamortiguación** .

3. Muelle viscoelástico sobreamortiguado o $\alpha > 0$ grande

- Caso explícito límite cuando $\varepsilon = \infty$, $r = 0$: **sobreamortiguación** para α grande.

- **Tma (No EDO límite):**

  Si ε grande, r pequeño y α **suficientemente grande**:

$$-\infty < \lambda_n < -1/\alpha \quad \text{con} \quad \lambda_n^+ \to -1/\alpha$$

$$\Downarrow$$

  - No conjunto finito de vaps dominantes $\Rightarrow$ $\boxed{\text{EDP} \nrightarrow \text{EDO!!}}$
  - Fenómeno de la **sobreamortiguación** .

*(**Dem:** $z = \sqrt{1+\lambda\alpha}$ en la ec. característica + comparación con $e^{2\frac{z^2-1}{\alpha z}} = -1$)*