

Anàlisi d'una equació d'ones
amb dissipació per a un
sistema molla-massa.

Marta Pellicer i Sabadí

Universitat Politècnica de Catalunya

Girona, 17 de juny del 2004

ESQUEMA

- ▶ Introducció.

- ▶ Model lineal:
 - ▷ model i objectius: valors propis dominants i EDO límit;

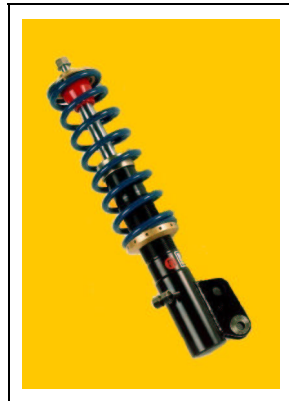
 - ▷ resultats principals.

- ▶ Model no lineal:
 - ▷ model i objectius: varietats invariants exp. atractores i EDO límit;

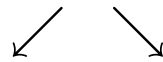
 - ▷ resultats principals.

EL MODEL LINEAL

Descripció del problema

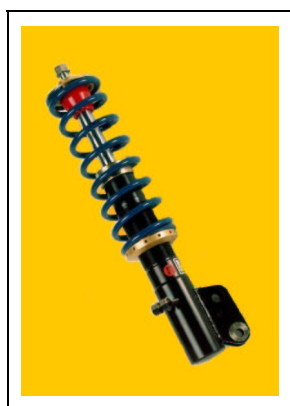


Sistema molla-massa



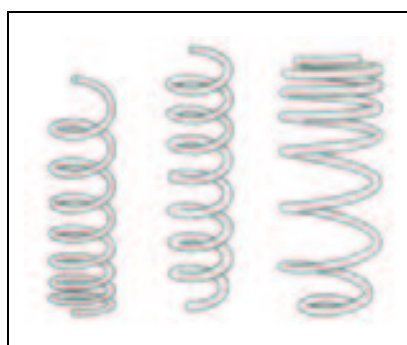
Present en: automoció, control sísmic, ...

Model lineal: introducció.

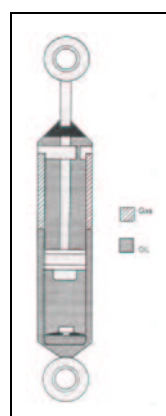


Molla viscoelàstica amb amortidor que actua a través de la massa

||



+



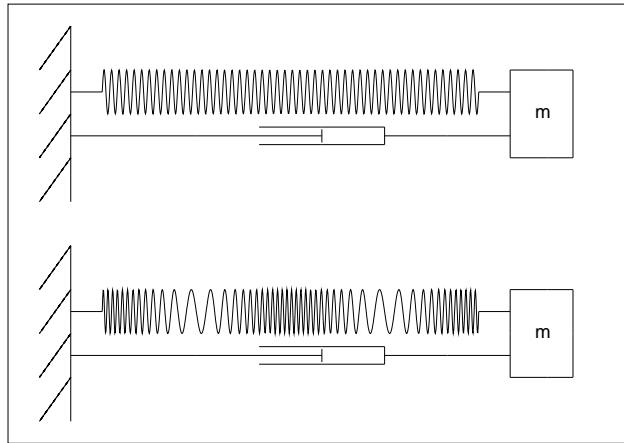
Molla viscoelàstica fixada en un extrem i amb massa rígida en moviment en l'altre, a través de la qual actua un amortidor (dissipació externa)

Model lineal: introducció.

Motivació del problema.

Equació clàssica de la molla:

$$m u''(t) + r u'(t) + k u(t) = 0$$



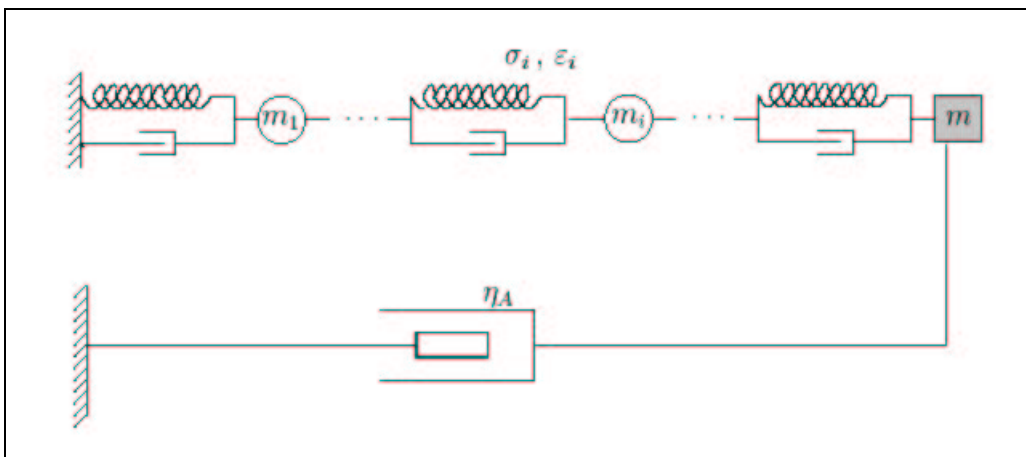
model en **EDO's** vs. model en **EDP's**.
Per què i quan les derivades parcials?

- ★ diferència en les deformacions internes.
- ★ possible dissipació interior.

Model lineal: introducció.

Modelització.

- ▶ Balanç de la quantitat de moviment ✓
- ▶ Models **reològics** ✓ o modelització de medis viscoelàstics mitjançant la combinació en sèrie-paral·lel de dues unitats simples: *spring* (elasticitat) i *dashpot* (viscositat)



Model de Kelvin-Voigt continu o equació d'ones amb dissipació forta (el nostre cas)

Model lineal: introducció.

► Model lineal (adimensionalitzat):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - u_{xx} - \alpha u_{txx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u_{tt}(1, t) = -\varepsilon [u_x(1, t) + \alpha u_{tx}(1, t) + r u_t(1, t)] \end{array} \right.$$

(Grobbelaar'94, Massat'83, ...)

Equació d'ones amb **dissipació forta** i
condicions de contorn **dinàmiques**

$u(x, t)$ = desplaçament de la partícula x
a temps t

$\alpha \geq 0 \rightsquigarrow$ dissipació interna (molla)

$r > 0 \rightsquigarrow$ dissipació externa (amortidor extern)

$\varepsilon \geq 0 \rightsquigarrow$ invers de la massa externa

Model lineal: introducció.

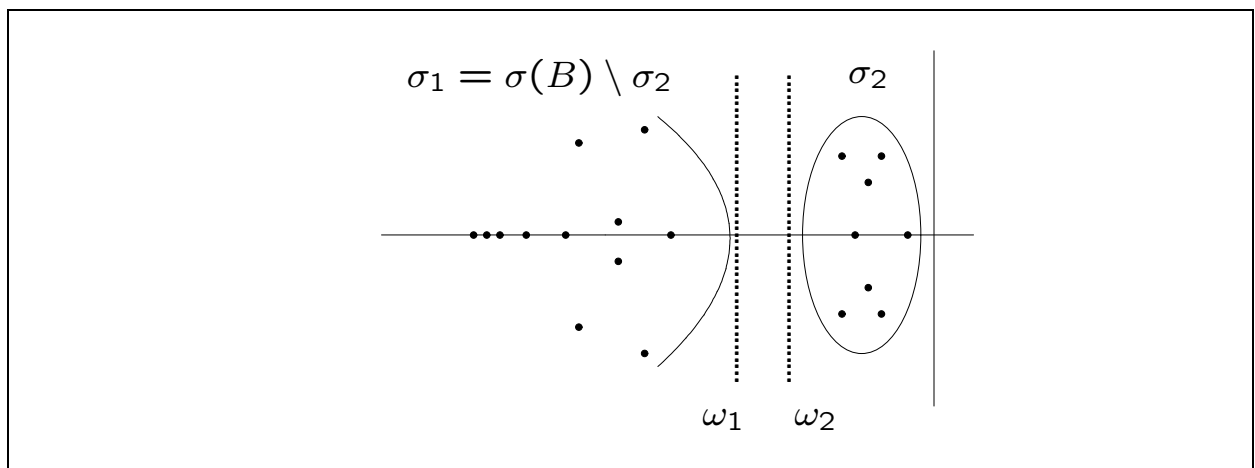
COMPORAMENT ASIMPTÒTIC DE LES SOLUCIONS

Valors propis dominants i reducció a EDO's

Pensem el model com l'equació d'evolució

$$\frac{d}{dt} x(t) = B x(t)$$

Si $\sigma(B) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, amb σ_2 conjunt finit de vaps aïllats, multiplicitat algebraica finita i part real major que la resta, aleshores σ_2 són **valors propis dominants** de B.



En aquest cas, l'equació de dimensió finita $x'_2 = B_2 x_2$ pot pensar-se com el **límit** de la de dimensió infinita $x' = B x$.

Model lineal: eines.

Convergència generalitzada d'operadors (generalització de la convergència en norma, Kato)

Siguin T_n , $n \in \mathbb{N}$, operadors tancats. Diem que **convergeix en sentit generalitzat** a T quan $n \rightarrow \infty$ si:

$$\widehat{\delta}(T_n, T) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

on $\widehat{\delta}$ mesura la distància entre les gràfiques.

► Equivalentment ...

* conv. gen $\Leftrightarrow \|T_n - T\| \rightarrow 0$ si acotats.

* conv. gen $\Leftrightarrow \|T_n^{-1} - T^{-1}\| \rightarrow 0$ si inversos acotats.

* ...

Model lineal: eines.

Tma (Semicontinuitat superior de l'espectre, Kato)

Si T tancat amb $\sigma(T)$ **separat** en dues parts per una corba tancada Γ , i S és un altre operador tancat tal que $\hat{\delta}(T, S)$ prou petit, aleshores $\sigma(S)$ està **separat de la mateixa manera** (subespais propis isomorfs, convergència en norma de les projeccions, ...)



continuitat de conjunts compactes de vaps ...

Model lineal: eines.

ENTORN FUNCIONAL

$$X_2 = \{(u, \gamma) \in H^2(0, 1) \times \mathbb{C}, u(1) = \gamma, u(0) = 0\}$$

com a subespai de $H^2(0, 1) \times \mathbb{C}$;

$$X_1 = \{(u, \gamma) \in H^1(0, 1) \times \mathbb{C}, u(1) = \gamma, u(0) = 0\}$$

com a subespai de $H^1(0, 1) \times \mathbb{C}$; i

$$X_0 = \{(u, \gamma) \in L^2(0, 1) \times \mathbb{C}\} = L^2(0, 1) \times \mathbb{C}$$

El model lineal es pot escriure com l'equació d'evolució:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}V - A_\alpha(\varepsilon)V = 0, & t \in (0, \infty) \\ V(0) = F_0 \end{cases}$$

on

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A_\alpha(\varepsilon)) &= \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in X_1 \times X_1, (u + \alpha v) \in H^2(0, 1) \right\} \\ &\subset \mathcal{H} = X_1 \times X_0 \end{aligned}$$

Model lineal: entorn funcional.

Norma en \mathcal{H} :

$$\left\| \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, \beta) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}} = \int_0^1 |u_x|^2 dx + \int_0^1 |v|^2 dx + |\beta|^2$$

(equivalent a la norma habitual d'aquest espai producte).

Però si $\varepsilon > 0$ tenim definida una **família** de normes **equivalents** a l'anterior:

$$\left\| \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, \beta) \end{pmatrix} \right\|_{\varepsilon} = \int_0^1 |u_x|^2 dx + \int_0^1 |v|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} |\beta|^2$$

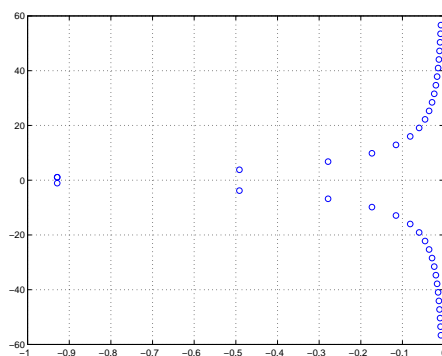
OBS: Serà important poder utilitzar una o altra norma, segons convingui.

Model lineal: entorn funcional.

Resultats principals

1. Molla elàstica perfecta ó $\alpha = 0$:

- ★ A_0 genera un semigrup continu de contraccions.
- ★ $\sigma(A_0) = \sigma_p(A_0)$ (no té σ_{ess}) i està format per infinits vaps, tots amb $Re \lambda < 0$, que s'acumulen a $Re \lambda = 0$.



Model lineal: $\alpha = 0$.

Per tant ...

- ▶ No existeix cap subconjunt finit de valors propis dominants: EDP \nrightarrow EDO !!
- ▶ Però ... totes les solucions tendeixen a 0 quan $t \rightarrow \infty$. I existeixen solucions que hi van tan lentament com vulguem (ja que no dissipació interna).

Model lineal: $\alpha = 0$.

2. Molla viscoelàstica amb $\alpha > 0$ petit:

(pensarem A_α com a pertorbació de A_0)

★ A_α genera un semigrup analític si $\alpha > 0$.

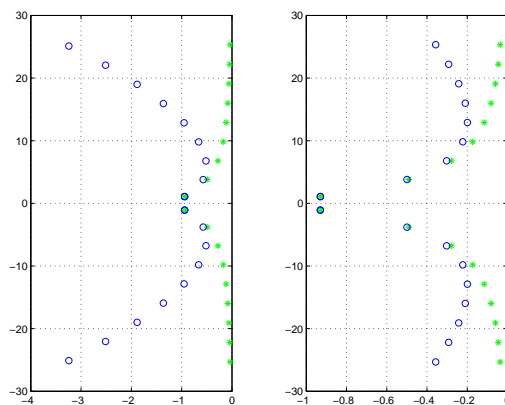
★ $\sigma_{ess}(A_\alpha) = \left\{ \frac{-1}{\alpha} \right\}, \alpha > 0.$

★

$$\sigma_p(A_\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \sigma_p(A_0)$$

sobre compactes, però no global.

(perquè $A_\alpha \rightarrow A_0$ en sentit generalitzat, però A_α operador sectorial quan $\alpha > 0$)



($\alpha = 0.01$) ($\alpha = 0.001$)

Model lineal: $\alpha \sim 0$.

Per tant, existeix un conjunt finit de valors propis dominants.



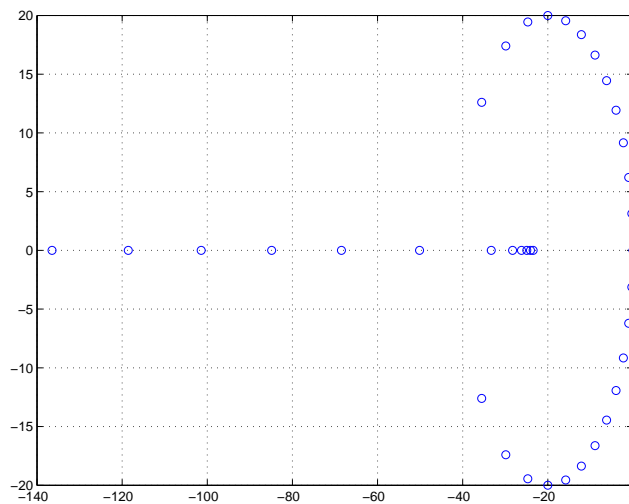
EDP \rightarrow EDO ?

- ▶ Sí, però ordre i coeficients de l'EDO poden ser diferents per a cada α .

Model lineal: $\alpha \sim 0$.

3. Molla amb una gran massa a l'extrem
($\varepsilon > 0$ petit) :

3a. CAS $\varepsilon = 0$ (solucions explícites):



★ $\lambda = 0$ és *valor propi, doble i dominant*.

$$★ \sigma_{ess}(A_\alpha(0)) = \left\{ \frac{-1}{\alpha} \right\}.$$

Model lineal: $\varepsilon = 0$

3b. CAS $\varepsilon > 0$ i petit:

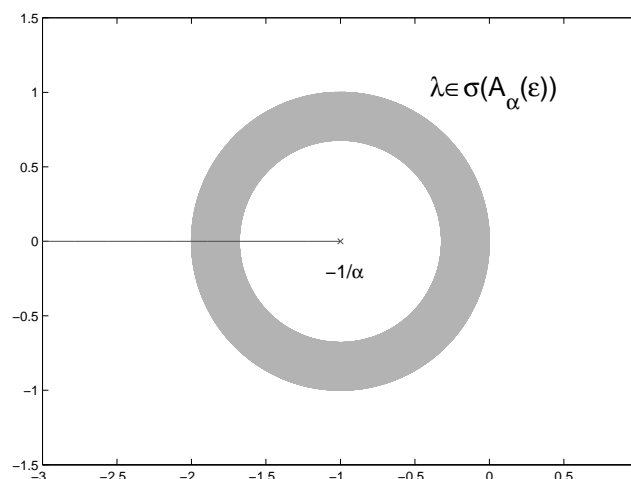
pertorbació del cas $\varepsilon = 0$ ja que

$$A_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} A_0 \quad \text{en sentit generalitzat}$$

(en norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, però també en $\|\cdot\|_\varepsilon$)

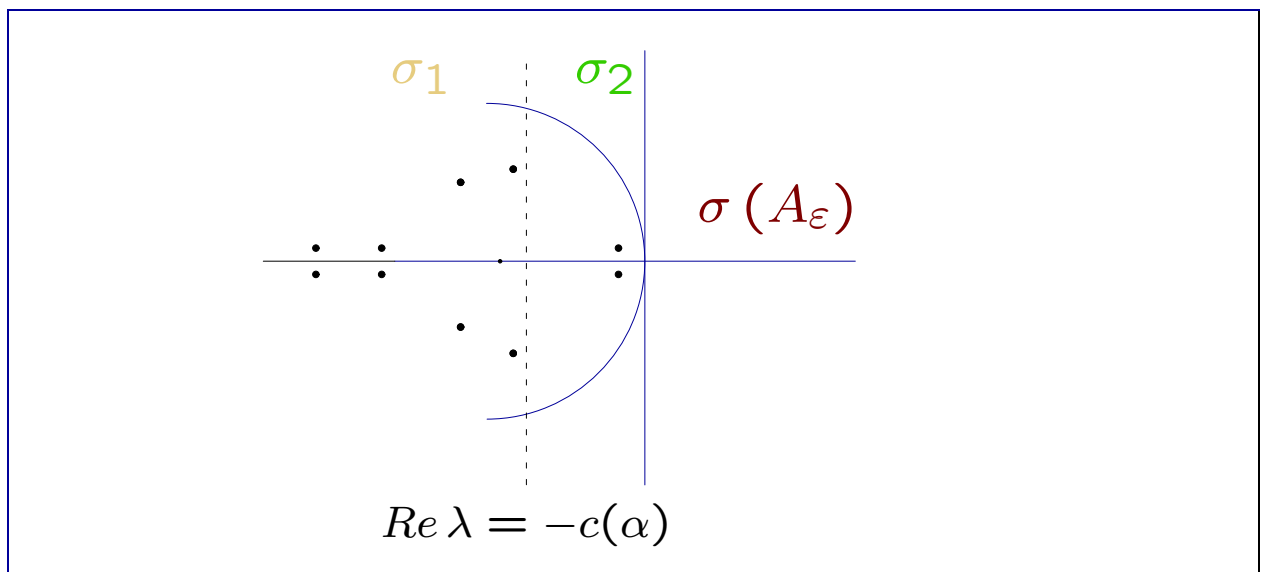
★ Pertorbació de l'espectre:

$\sigma_p(A_\alpha(\varepsilon))$ tendeix a
circumferència + semirecta real
quan $\varepsilon \rightarrow 0$ (*anàlisi eq. característica*)



Model lineal: $\varepsilon \sim 0$

- ★ Si $\varepsilon < \varepsilon_0$ l'operador admet $\{\lambda_0^+(\varepsilon), \lambda_0^-(\varepsilon)\}$ (pertorbacions de $\lambda(0) = 0$) com subconjunt finit de **vaps dominants**.



Per tant ...

► Si la massa és prou gran, les solucions en $x = L$ de l'EDP poden aproximar-se, quan $t \rightarrow \infty$, per les solucions de l'EDO:

$$m w'' + k_1 w' + k_0 w = 0$$

amb

$$k_1 = \left(\frac{E_1}{L} + q \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{E_1}{L} + q \right) \left(\frac{\rho L}{m} \right) + \left(\frac{4 E_1}{45 L} + \frac{q}{15} \right) \left(\frac{\rho L}{m} \right)^2 + \dots$$

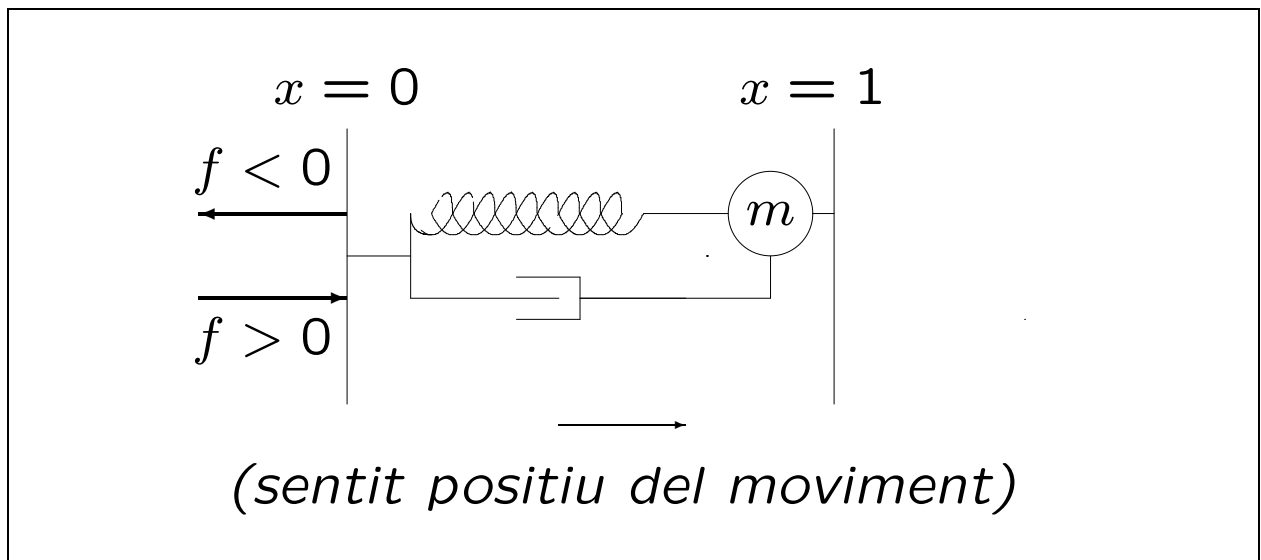
$$k_0 = \frac{E}{L} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\rho L}{m} \right) + \frac{4}{45} \left(\frac{\rho L}{m} \right)^2 + \left(\frac{q^2}{45 E \rho} - \frac{16}{945} \right) \left(\frac{\rho L}{m} \right)^3 + \dots \right]$$

No és l'equació clàssica de la molla !!

Model lineal: $\varepsilon \sim 0$

EL MODEL NO LINEAL

Descripció del problema



Imposem una acceleració en $x = 0$ (abans fixat) al sistema anterior:

$$u_{tt}(0) = \kappa f_{\varepsilon}(\underbrace{u(1, t) - u(0, t)}_{\neq ia \text{ desplaçament}}, \underbrace{u_t(1, t) - u_t(0, t)}_{\neq ia \text{ velocitat}})$$

amb $\kappa > 0$ un nou paràmetre fixat i

$$f_{\varepsilon}(z_1, z_2) := \varepsilon f\left(z_1, \frac{z_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

on $f(z_1, z_2)$ és Lipschitz, acotada i *prou regular*.

Model no lineal: introducció.

Nou sistema de referència on $x = 0$ fixat:

$$u(x, t) \rightarrow u(x, t) - u(0, t)$$

+

Canvi adimensional

↓

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) - \alpha u_{txx}(x, t) + \kappa \varepsilon f \left(u(1, t), \frac{u_t(1, t)}{\sqrt{\varepsilon}} \right) = 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u_{tt}(1, t) = -\varepsilon [u_x + \alpha u_{tx} + r u_t](1, t) - \kappa \varepsilon f \left(u(1, t), \frac{u_t(1, t)}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \end{array} \right.$$

per $x \in (0, 1)$, $t > 0$, i els paràmetres $\alpha > 0$,
 $\kappa > 0$ i $r > 0$ fixats, i $\varepsilon \geq 0$.

OBS: Si $f \equiv 0$ tenim el model lineal anterior.

Model no lineal: introducció.

OBJECTIU: Veure quan l'equació d'ones no lineal admet una EDO com a límit.



varietats invariants exp. atractores



quan $\varepsilon \rightarrow 0$ existeix una EDO límit que, amb un reescalat del temps, és:

$$u'' + u + \kappa f(u, u') = 0$$

Problema invers: f **control** extern en $x = 0$ per aconseguir **desplaçament-objectiu** (possible si és solució d'una EDO tipus l'EDO límit).

Exemple: controlar el sistema per aconseguir que el desplaçament tendeixi a ser periòdic no constant és trobar el control per tal que l'EDO límit sigui:

$$u'' + g(u)u' + u = 0 \quad (\text{eq. Lienard})$$

$$\Rightarrow \text{control: } f(z_1, z_2) = g(z_1)z_2.$$

Model no lineal: introducció.

Podem escriure l'EDP no lineal com una equació d'evolució:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} - A_\varepsilon V = F_\varepsilon(V), & t > 0 \\ V(0) = V_0 \end{cases}$$

on la no linealitat F_ε no depèn en aquest cas de t i està definida en tot \mathcal{H} de la manera següent:

$$F_\varepsilon \left(\begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, \beta) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} (0, 0) \\ \left(-\kappa \varepsilon f(u(1), \frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}}), -\kappa \varepsilon f(u(1), \frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}}) \right) \end{pmatrix}$$

\Rightarrow tenim **existència i unicitat de solució**.

Model no lineal: introducció.

COMPORAMENT ASIMPTÒTIC DE LES SOLUCIONS

Varietats invariants exponencialment
atractores

★ $S \subset X \times Y$ és una *varietat invariant* de

$$\begin{cases} \dot{x} = Tx + h(x, y) \\ \dot{y} = By + g(x, y) \end{cases} \quad (\text{p. ex. } \dim Y < \infty)$$

si existeix $\sigma : Y \rightarrow X$ tal que

$$S = \{(x, y) \in X \times Y : x = \sigma(y)\}$$

i $\forall (x_0, y_0) \in S$ existeix $(x(\cdot), y(\cdot))$ solució tq:

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0 \text{ y } (x(t), y(t)) \in S \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

★ S és *exponencialment atractora* si $\exists \gamma, K \geq 0$
tq:

$$\|x(t) - \sigma(y(t))\| \leq Ke^{-\gamma t} \|x(0) - \sigma(y(0))\|$$

per a tota solució $(x(t), y(t))$.

Model no lineal: eines.

► Preparació del problema:

Reescalem el temps: $t \rightarrow t\sqrt{\varepsilon}$
(acceleració del sistema quan $\varepsilon \rightarrow 0$)

$$\frac{d}{dt} V - A_N V = F_N(V)$$

on

$$A_N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_\varepsilon$$

$$F_N \left(\begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \right) = -\kappa\sqrt{\varepsilon} \left(\begin{pmatrix} (0, 0) \\ \left(f \left(u(1), \frac{v(1)}{\sqrt{\varepsilon}} \right), f \left(u(1), \frac{v(1)}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \right) \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{OBS: } \lambda \in \sigma(A_\varepsilon) \Leftrightarrow \mu = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}} \in \sigma(A_N)$$

(però els subespais propis són els mateixos
que per A_ε).

Model no lineal: eines.

Separació de l'espectre (\Rightarrow de l'espai,
projeccions, ...)

$$\sigma \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_\varepsilon \right) = \sigma_1^\varepsilon \cup \sigma_2^\varepsilon$$

con

$$\sigma_1^\varepsilon = \sigma \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_\varepsilon \right) \setminus \sigma_2^\varepsilon \Rightarrow \operatorname{Re} (\sigma_1^\varepsilon) < \frac{-c(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\infty$$

$$\sigma_2^\varepsilon = \{ \mu_0^+(\varepsilon), \mu_0^-(\varepsilon) \} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \pm i \}$$

\Rightarrow Descomposició de \mathcal{H} i F_N (projeccions):

$$\mathcal{H} = H_1^\varepsilon \oplus H_2^\varepsilon \quad (\dim H_2^\varepsilon = 2)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} V_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (A_\varepsilon|_{H_1^\varepsilon}) \right) V_1 + P_1^\varepsilon (F_N(V)) \\ \frac{d}{dt} V_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (A_\varepsilon|_{H_2^\varepsilon}) \right) V_2 + P_2^\varepsilon (F_N(V)) \end{cases}$$

Model no lineal: eines.

Resultats principals: Equació límit

► L'equació d'evolució no lineal reescalada convergeix quan $\varepsilon \rightarrow 0$ en la topologia \mathcal{C}^1 al sistema:

$$\begin{cases} u'(1) = w(1) \\ w'(1) = -u(1) - \kappa f(u(1), w(1)) \end{cases}$$

Si estructuralment estable \Rightarrow fluxos seran **topològicament equivalents** si ε es prou petit.



Amb el temps reescalat, les solucions de l'EDP no lineal inicial convergeixen a les solucions de l'EDO:

$$u''(1) + u(1) + \kappa f(u(1), u'(1)) = 0$$

on $u(1) = u(1, t)$.

Model no lineal: EDO límit.

Idea de la demostració:

► **PAS 1:** Existència d'una varietat invariant exponencialment atractora, σ_ε .

★ Si ε prou petit, existeix S_ε v.i.e.a.:

$$S_\varepsilon = \{V = (V_1, V_2) : V_1 = \sigma_\varepsilon(V_2), V_2 \in H_2^\varepsilon\}$$

on $\dim(H_2^\varepsilon) = 2$.

★ El flux sobre S_ε ve donat per

$$V(t) = V_2(t) + \sigma_\varepsilon(V_2(t))$$

on $V_2(t)$ és solució de:

$$\frac{d}{dt} V_2 = A_N(V_2) + P_2^\varepsilon [F_N(V_2 + \sigma_\varepsilon(V_2))], \quad V_2 \in H_2^\varepsilon$$

★ A més, $\sigma_\varepsilon, D\sigma_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ en $\|\cdot\|_\varepsilon$.

Model no lineal: pas 1.

Conseqüències:

1. EDP tendeix a l'equació sobre S_ε



tendeix a una EDO d'ordre 2:

$$\frac{d}{dt} V_2 = A_N(V_2) + P_2^\varepsilon [F_N(V_2 + \sigma_\varepsilon(V_2))], \quad V_2 \in H_2^\varepsilon$$

2. permetrà el càlcul explícit del límit de l'EDO quan $\varepsilon \rightarrow 0$ (norma ε crucial)

Model no lineal: pas 1.

Demostració pas 1:

Aplicació del tma. d'existència de var. inv. per a famílies d'operadors

(Henry'81, Carvalho'95, Carvalho & Lozada-Cruz'01, Carbone'03, ...)

"... si l'espectre està *suficientment separat* en dues parts, es pot enviar tot al $-\infty$ excepte un nombre finit de valors propis, que ens donaran la dinàmica del sistema quan $t \rightarrow \infty$ (v.i.e.a, amb funció que va a zero ...)"

\Rightarrow Per veure-ho, calen una sèrie d'acotacions uniformes en ε de la restricció de la part lineal i de la no lineal sobre cada subespai.

Dificultat: operador no autoadjunt

\Rightarrow problema per aconseguir acotacions uniformes \Rightarrow conv. generalitzada \checkmark

Model no lineal: pas 1.

► **PAS 2:** Límit de l'EDO sobre la varietat invariant

Problema:

A_ε no autoadjunt \Rightarrow projectar sobre S_ε es complica \Rightarrow EDO en *varietat semblant*

Usem que:

$$H_2^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} H_2^0$$

(isomorfisme explícit i projeccions convergeixen en norma)

\Downarrow

$$S_\varepsilon = V_\varepsilon + \sigma_\varepsilon(V_\varepsilon), \quad V_\varepsilon \in H_2^\varepsilon$$

varietat pròxima a

$$S_0 = V_0 + \sigma_\varepsilon(V_0), \quad V_0 \in H_2^0$$

(sí hi sabem projectar)

Model no lineal: pas 2.

Equació en S_0 (canvi de variables adequat)

+

límit dels coeficients en norma C^1 usant que

$$\sigma_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \text{ en } \|\cdot\|_\varepsilon$$

↓

EDO límit (norma C^1)

$$u''(1) + u(1) + \kappa f(u(1), u'(1)) = 0 \quad \checkmark$$

Model no lineal: pas 2.